



प्रारम्भिक सांख्यिकी  
एवं  
भारत का आर्थिक विकास

(STATISTICS & EVOLUTION OF INDIAN ECONOMY)

[ भाग 1—सांख्यिकी (Statistics) ]

लेखक

भार० डी० गुप्ता

एम० ए०, बी० काम०, एल एल० बी०

शिक्षा अधिकारी

शिक्षा निदेशालय, दिल्ली

सी० एल० दुसाज

एम० ए०, एल एल० बी०

दिल्ली पब्लिक स्कूल

मथुरा रोड, नई दिल्ली

तथा

बी० के० गुप्ता एम० ए० (अर्थ०), एम० काम०,

राजकीय बाल सीनियर विद्यालय न० 1,

झील कुरजा, दिल्ली ।

10  
OF RECOMMENDATION

पीताम्बर पब्लिशिंग कम्पनी

शैक्षिक प्रकाशक

888, ईस्ट पाक रोड, करौल बाग,

नई दिल्ली-110005



प्रकाशक : पीताम्बर प्रिंटिंग कम्पनी  
888, ईस्ट पार्क रोड, करोल बाग, नई दिल्ली-110005 (भारत)  
दूरभाष कार्यालय 519433, 526933  
आवास 562919, 561321

[ सस्करण 1980 ]

[ मूल्य ~~Rs 6750~~ से Price Rs 8 10 ]

[ सर्वाधिकार सुरक्षित हैं ]

मुद्रक : पीताम्बर प्रिंटिंग प्रेस  
41-42, बस्ती हरफूलसिंह,  
110006  
[ 512041 ]

## भूमिका

प्रस्तुत पुस्तक सेंट्रल बोर्ड आफ सैकण्डरी एजुकेशन, नई दिल्ली की 10+2 शिक्षा प्रणाली के नवीनतम पाठ्यक्रमानुसार अथवास्तव विषय में कक्षा 11 के छात्रों के लिए लिखी गई है। इसके द्वारा छात्रों का सांख्यिकी के अध्ययन के लिये उपयुक्त विषय-सामग्री सरल भाषा में उपलब्ध कराने का प्रयास किया गया है। सांख्यिकी में विभिन्न विधियाँ तथा सूत्रों को स्पष्ट करने के लिये पर्याप्त सहायता में उदाहरणों का समावेश किया गया है तथा भारतीय अर्थ व्यवस्था के विकास से सम्बन्धित समस्याओं का अध्ययन स्पष्ट एवं सरल भाषा में किया गया है। विषय को रोचक, सरल एवं बोधगम्य बनाने के उद्देश्य से चित्र, चाट, एवं ग्राफ तथा सारणियों का यथास्थान प्रयोग किया गया है। प्रत्येक पाठ के अन्त में दोहराने की सुविधा के लिए सारांश दिया गया है और पर्याप्त सहायता में अभ्यासाध्य प्रश्न दिये गये हैं।

हमारा पूर्ण विश्वास है कि पुस्तक छात्रों को उपयुक्त एवं सरल विषय-सामग्री प्रदान करके विषय की आवश्यकता को पूरा करने में उपयोगी सिद्ध होगी।

पुस्तक के सुधार के लिये आदरणीय विषयाध्यापक एवं पाठकों के सुझाव सादर आमन्त्रित हैं।

—लेखकगण

	खण्ड 1—आर्थिक विश्लेषण में सांख्यिकी	पृष्ठ
1	प्रस्तावना	1
	खण्ड 2—आंकड़ों का सकलन एवं व्यवस्थितिकरण	
2	सांख्यिकीय आंकड़ा का स्वरूप, प्राथमिक व द्वितीय आंकड़े	15
3	संगणना तथा निदर्शन विधियाँ	30
4	आंकड़ा का व्यवस्थितिकरण	41
	खण्ड 3—आंकड़ों का प्रस्तुतीकरण	
5	सारणीयन प्रदर्शन	55
6	आंकड़ा का चित्रमय प्रदर्शन	6
7	आंकड़ा का विदुरेखीय प्रदर्शन	72
8	संख्यात्मक आंकड़ा की परिशुद्धता, उपसादन अनुपात दर, एवं प्रतिशत	95
	खण्ड 4—आंकड़ों का सक्षिप्तीकरण	
9	केन्द्रीय प्रवृत्तियों के माप	106
10	अपविरण या विश्लेषण के माप	152
11	सहसम्बन्ध	183
12	सूचकांक	194
	परिशिष्ट	
	सांख्यिकीय माप सूत्र	

## खण्ड I (UNIT I)

### आर्थिक विश्लेषण में सांख्यिकी

#### (STATISTICS IN ECONOMIC ANALYSIS)

##### अध्याय I

### प्रस्तावना

#### (INTRODUCTION)

सांख्यिकी का प्रयोग प्राचीन काल से ही होता चला आ रहा है। आरम्भ में इसका सम्बन्ध केवल राज्य शासन प्रबन्ध से ही था। इसका प्रयोग मरणाजन्तसङ्घ, जम तथा मृत्यु दर, फौजी शक्ति, धन सम्पत्ति सम्बन्धी आकड़े एकत्रित करने के लिए करती थी। चूंकि आकड़े केवल सरकारी कार्यों के लिए एवम्त्र किए जाते थे इसलिए सांख्यिकी का 'सरकारी विज्ञान' या 'राजतंत्र की कला' कहा जाता था। किंतु आधुनिक समय में सांख्यिकी का प्रयोग अधिक विस्तृत हो गया है। अब इसका प्रयोग केवल राज्य शासन प्रबन्ध तक ही सीमित नहीं बल्कि भौतिक विज्ञान, जीवन विज्ञान तथा सामाजिक विज्ञान में भी होन लगा है। वास्तव में प्रत्येक विज्ञान सांख्यिकी का प्रयोग किसी न किसी रूप में अवश्य करता है। आधुनिक सांख्यिकी विधियों जैसे के द्रव्य प्रवृत्ति के माप, अपक्षिरण के माप, विषमता के माप, प्रतिपगमन (regression), न्यादेश (sampling), महसम्बन्ध, सूचकांक आदि के विकास के कारण ही अर्थशास्त्र में सांख्यिकी का प्रयोग सम्भव हो सका है।

#### आर्थिक विश्लेषण (Economic Analysis)

अर्थशास्त्र एक विज्ञान है जो कि आर्थिक स्थिति में मानव व्यवहार का अध्ययन करता है। आर्थिक स्थिति में मानव व्यवहार का विश्लेषण करते समय इसे अनेक आर्थिक सम्बन्धित चला (variables) जैसे वस्तु का मूल्य और उसकी माँग, एक परिवार की आय और व्यय, मूल्य स्तर और निर्वाह लागत आदि को भी ध्यान में रखना पड़ता है। यह सांख्यिकीय विश्लेषण द्वारा ही हो सकता है। सांख्यिकी विश्लेषण आर्थिक विश्लेषण को शुद्धता प्रदान करता है। सांख्यिकीय विश्लेषण की सहायता से अर्थशास्त्री अनेक सम्बन्धित चलो के बीच आर्थिक सम्बन्धों की सरचना की जांच (test) करते हैं। इस प्रकार सांख्यिकीय विश्लेषण की सहायता से आर्थिक विश्लेषण अधिक प्रभावशाली हो जाता है।

**प्रयोगसिद्ध विश्लेषण (Empirical Analysis) तथा सङ्ख्यात्मक विश्लेषण (Quantitative Analysis) —**

**प्रयोगसिद्ध विश्लेषण (Empirical Analysis) —**

प्रयोगसिद्ध विश्लेषण से तात्पर्य किसी विषय के अध्ययन की उन विधि स है जिसमें वास्तविक अवलोकना एवं परीक्षणों (Experiments) के आधार पर ज्ञान प्राप्त किया जाता है। अर्थात् प्रयोगसिद्ध विश्लेषण विधि के अंतर्गत हम अवलोकिक व्यवहार के द्वारा तथ्यों का ज्ञान प्राप्त करते हैं। प्राकृतिक विज्ञानों जैसे भौतिक शास्त्र व रसायन शास्त्र में तो अध्ययन की इस विधि के आधार पर प्राप्त विज्ञान एवं नियमों का परीक्षण (Testing) प्रयोगशाला में किया जाता है। परन्तु अर्थशास्त्र तो एक सामाजिक विज्ञान है जिसकी विषय सामग्री मनुष्य है और क्षेत्र समस्त विश्व है। अतः इसमें अवलोक विधि के आधार पर प्राप्त निष्कर्षों एवं नियमों का परीक्षण प्रयोगशाला में नहीं कर सकते। इसलिए अर्थशास्त्र में सांख्यिकीय विधियों को अपनाया जाता है। सांख्यिकीय विधियों के अंतर्गत भी समस्याओं का व्यवस्थित रूप से अध्ययन किया जाता है परन्तु प्रयोगशाला में परीक्षण की सुविधा न होने के कारण इन विधियों द्वारा प्राप्त नियम इतने शुद्ध नहीं होते।

**सङ्ख्यात्मक विश्लेषण (Quantitative Analysis)**

सङ्ख्यात्मक विश्लेषण अध्ययन की उस विधि को कहते हैं जिसके अन्तर्गत तथ्यों की शुद्धता (preciseness) दी जाती है ताकि तथ्यों के बीच तुलना करना सम्भव हो सके। इसके अंतर्गत हम तथ्यों का अध्ययन सङ्ख्यात्मक रूप में करते हैं जैसे—सङ्घा में 20, 35, 50 आदि, वजन में किलोग्राम, किबटल टन आदि, ऊँचाई में सेटीमीटर, मीटर आदि। इसके पश्चात् उन सङ्ख्यात्मक तथ्यों का सारणीभवन (tabulation) एवं विश्लेषण किया जाता है तथा उनके आधार पर परिणाम निकाले जाते हैं। सक्षेत्र में सङ्ख्यात्मक विश्लेषण का मुख्य उद्देश्य तथ्यों की शुद्धता प्रदान करना है ताकि उनके बीच आसानी से तुलना हो सके।

**सांख्यिकी का अर्थ (Meaning of Statistics)**

सांख्यिकी शब्द दो विभिन्न अर्थों—बहुवचन और एकवचन में प्रयोग किया जाता है। जब यह बहुवचन में प्रयोग होता है तो इसका अर्थ सांख्यिकीय आंकड़ों के क्रमबद्ध संग्रह (Numerical or Quantitative Data) जैसे भारत के विभिन्न राज्यों में बेरोजगार व्यक्तियों की संख्या, 1971 की जनगणना रिपोर्ट में जनसङ्ख्या के आंकड़ों का ब्यौरा, देश में विभिन्न फसलों में उत्पादन का ब्यौरा, देश के विभिन्न भागों में अनपढ़ व्यक्तियों का ब्यौरा, आदि इसके उदाहरण हैं। अतः इस प्रयोग में सांख्यिकी से अभिप्राय आंकड़ों से होता है। परन्तु जब सांख्यिकी शब्द एकवचन में प्रयोग होता है तो इसका अर्थ “सांख्यिकी विज्ञान” (of Statistics) से है। सांख्यिकी विज्ञान आंकड़ों के संग्रह करने,

व्यवस्थितिकरण करने, प्रस्तुतीकरण करने, विश्लेषण करने और उनकी व्याख्या करने में प्रयुक्त सांख्यिकी सिद्धांतों और विधियों को बताता है।

### सांख्यिकी की परिभाषा (Definition of Statistics)

विभिन्न लेखकों ने सांख्यिकी की विभिन्न परिभाषाएँ दी हैं। कुछ लेखकों ने इसे सांख्यिकी विधियों (एकवचन) के रूप में माना है और कुछ लेखकों ने इसे आंकड़ों अथवा तथ्यों के समूह (बहुवचन) के रूप में माना है।

### सांख्यिकी की परिभाषा (सांख्यिकी विज्ञान के रूप में)

डा० ए० एल० बाउले (A L Bowley) ने सांख्यिकी की अनेक परिभाषाएँ दी हैं। एक स्थान पर उन्होंने कहा है कि 'सांख्यिकी गणना करने का विज्ञान है।' एक दूसरे स्थान पर यह कहते हैं कि सांख्यिकी 'माध्यों का विज्ञान' है। परंतु यह दोनों परिभाषाएँ अति सीमित हैं क्योंकि सांख्यिकी विज्ञान न तो गणना तक ही सीमित है और न माध्यों तक ही। डा० बाउले ने एक और परिभाषा दी है जो इस प्रकार है—“सांख्यिकी विज्ञान, किसी अनुसंधान से सम्बंधित अंकों में व्यक्त किये गये उन तत्वों से है जिन्हें एक दूसरे के सम्बंध में रखा जा सकता है, के विवरण को कहते हैं।”<sup>1</sup> बाउले की यह परिभाषा भी भी सवमाय नहीं क्योंकि इस परिभाषा में भी समांख्यिकी (Statistics) की कुछ ही विशेषताओं पर प्रकाश डाला गया है, समस्त विशेषताओं पर नहीं। बाउले की एक और परिभाषा इस प्रकार है, “सांख्यिकी वह विज्ञान है जो सामाजिक व्यवस्था को सम्पूर्ण मान कर उसके सभी रूपों का माप या मापन करता है।”<sup>2</sup>

डा० बाउले की यह परिभाषा भी सीकीण है क्योंकि यह सांख्यिकी का क्षेत्र केवल समाज शास्त्र तक ही सीमित करती है। अपनी परिभाषा की इस श्रमी को स्वयं बाउले ने स्वीकार किया है जब उन्होंने यह कहा कि “सांख्यिकी का विज्ञान केवल किसी एक विज्ञान तक ही सीमित नहीं हो सकता।”

प्रो० बोडिंगटन (Boddington) ने सांख्यिकी की परिभाषा इस प्रकार दी है, “सांख्यिकी अनुमान और सम्भावनाओं का विज्ञान है।”<sup>3</sup> यह परिभाषा भी अपर्याप्त है। क्रॉक्सटन (Croxtton) तथा काऊडन (Cowden) ने सांख्यिकी की एक सरल तथा अधिक विस्तृत परिभाषा दी है “सांख्यिकी आंकड़ों के संग्रह करने, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण एव उनके निवचन का विज्ञान है।”<sup>4</sup>

1 'Statistics are numerical statements of facts in any department of enquiry placed in relation to each other' —Bowley, A L

2 "Statistics is the science of measurement of social organism regarded as a whole in all its manifestation" —Bowley A L

3 'Statistics is the science of estimates and probabilities

—Boddington

4 "Statistics may be defined as the collection presentation, analysis and interpretation of numerical data

—Croxtton & Cowden



प्रो० सालिगमैन (Saligman) ने सांख्यिकी की अधिक विस्तृत परिभाषा दी है। उनके अनुसार "सांख्यिकी एक विज्ञान है जो कि सद्योत्पन्न आंकड़ों के संग्रह करने की विधियों, वर्गीकरण, प्रस्तुतीकरण, तुलना तथा उनके विश्लेषण तथा निबचन से सम्बन्धित है, जो कि किसी निरीक्षण अथवा प्रयोग के निम्नो भी क्षेत्र की जाच के लिए संग्राहित किये गए हैं।"<sup>1</sup>

सांख्यिकी की परिभाषा (आंकड़ों अथवा तथ्यों के समूह अथवा बहुवचन के रूप में)

तथ्यों के समूह के रूप में हम सबसे पहले वेबस्टर (Webster) की परिभाषा लिखते हैं। वेबस्टर के अनुसार "सांख्यिकी एक राज्य के लोगों की स्थिति से सम्बन्धित वर्गीकृत तथ्य है—विशेष रूप से वह तथ्य जिसको अका के रूप में या किसी सारिणी या वर्णित रूपद्वारा प्रस्तुत किया जा सकता हो।" यह परिभाषा भी ठीक नहीं है। इसके द्वारा सांख्यिकी का क्षेत्र केवल राज्यकीय कार्यों में प्रस्तुत आंकड़ों के संग्रह तक ही सीमित रह जाता है जब कि वास्तव में सांख्यिकी का क्षेत्र अत्यन्त विस्तृत हो गया है।

प्रो० होरेस सेक्रिस्ट (Prof Horace Secrist) ने भी सांख्यिकी की तथ्यों के समूह अथवा आंकड़ों के रूप में परिभाषा दी है जो इस प्रकार है "सांख्यिकी तथ्यों के उस समूह को कहते हैं जो अनेक कारणों से एक सीमा तक प्रभावित होते हैं और जिन्हें अको में व्यक्त किया जाता है, जिनकी गणना या अनुमान शुद्धता की एक उचित स्तर तक की जाती है, जिन्हें पूर्य निश्चित उद्देश्य के लिए एक व्यवस्थित ढंग से संग्रहित किया जाता है तथा जिन्हें एक दूसरे के तुलनात्मक रूप में रखा जाता है।"<sup>2</sup>

1 "Statistics is the science which deals with methods of collecting classifying, presenting, comparing and interpreting numerical data collected to throw some light on any sphere of enquiry".

—Saligman

2 "Statistics are the classified facts representing the conditions of the people in a state especially those facts which can be stated in numbers or in tables or numbers or in any other tabular or classified arrangement"

—Webster.

3 "By Statistics we mean aggregate of facts affected to a marked extent by multiplicity of causes, numerically expressed, enumerated or estimated according to a reasonable standard of accuracy, collected in a systematic manner for a predetermined purpose and placed in relation to each other"

—Secrist.

## सांख्यिकी की विशेषताएँ (Characteristics of Statistics)

सभी आँकड़े अथवा सख्यात्मक तथ्य सांख्यिकी कहलाने के योग्य नहीं होते। केवल वही तथ्य सांख्यिकी कहला सकते हैं जिसमें निम्नलिखित विशेषताएँ होती हैं

### 1 तथ्यों के समूह (Aggregates of Facts)

एक अकेला तथ्य जैसे "मोहन की आयु 15 वर्ष है" सांख्यिकी नहीं कहला सकता यद्यपि यह तथ्य अंक में व्यक्त है। इसका कारण यह है कि एक अकेले तथ्य का किसी सम्बन्धित रूप से अध्ययन नहीं किया जा सकता। उदाहरण के लिए एक अकेला तथ्य जोकि जन्म, मृत्यु, प्रेम, विक्रय आदि से सम्बन्धित है, सांख्यिकी नहीं कहला सकता। परन्तु जन्म, मृत्यु, प्रेम, विक्रय आदि से सम्बन्धित तथ्यों के समूह सांख्यिकी कहलाते हैं।

### 2 अनेक कारणों से प्रभावित (Affected by Multiplicity of Causes)

सांख्यिकी अनेक कारणों से प्रभावित होती है न कि केवल किसी एक कारण से। उदाहरण के लिए एक विशेष अवधि में गेहूँ के उत्पादन की मात्रा अनेक कारणों जैसे मिट्टी की कसम, तापमान, वर्षा की मात्रा आदि पर निर्भर करती है। इसी प्रकार वस्तुओं की कीमत केवल मुद्रा की पूंति से ही प्रभावित नहीं होती बल्कि अनेक कारण जैसे उपभोग में परिवर्तन, आयत एवं निर्यात में परिवर्तन इत्यादि पर प्रभाव डालते हैं।

### 3 अंका में व्यक्त (Numerically Expressed)

सांख्यिकी तथ्यों को सख्यात्मक रूप में अभिव्यक्त करती है अर्थात् सांख्यिकी आँकड़े सदा अंकों में व्यक्त किये जाते हैं जैसे 1975-76 में 121 मिलियन टन खाद्यान्न का उत्पादन, 103 मिलियन टन कोयले का उत्पादन 8091 मि० मीटर कपड़े का उत्पादन आदि। गुणात्मक वाक्य जैसे "भारत की जनसंख्या में तीव्र गति से वृद्धि हो रही है" या "भारत में कोयले का उत्पादन काफी है" आदि सांख्यिकी नहीं हैं।

### 4 गुणवत्ता का उचित-स्तर (Reasonable Standard of Accuracy)

सांख्यिकी आँकड़े दो विधियों से एकत्रित किये जाते हैं—गिनती या माप द्वारा और अनुमान द्वारा। उदाहरण के लिए जब हम यह कहते हैं कि परीक्षा हाल में 200 विद्यार्थी बैठे हैं तो यह आँकड़े हमने गिनती द्वारा प्राप्त किये हैं, अतः यह शत प्रतिशत शुद्ध हैं। परन्तु जब हम शत प्रतिशत आँकड़े एकत्रित नहीं कर सकते तो हम अनुमान लगा लेते हैं उदाहरण के लिए यह कहा गया कि '15 अगस्त 1978 का प्रधान मंत्री का भाषण सुनने के लिए लगभग 4 लाख व्यक्ति गए' या यह आँकड़े अनुमानित हैं पूणतया शुद्ध नहीं, किन्तु प्रभावित 4 लाख से कुछ कम या अधिक हो सकते हैं। फिर भी सांख्यिकी आँकड़ों में यथाचित परिशुद्धता होना आवश्यक है अथवा आँकड़े भ्रामक होंगे।

### 5 पूर्व-निश्चित उद्देश्य के लिए एकत्रित (Collected for Pre-determined Purpose)

सांख्यिकीय आंकड़े एक पूर्व-निश्चित उद्देश्य के लिए एकत्रित किये जाते हैं। यदि आंकड़ों को एकत्रित करने का उद्देश्य सामने न हो तो सकलनकर्ता आवश्यक तथा अनावश्यक आंकड़ों में भेद नहीं कर सकता। उद्देश्य की अनुपस्थिति में हो सकता है कि सकलनकर्ता आवश्यक आंकड़ों को छोड़ दे और अनावश्यक आंकड़ों का संप्रह कर ले। अतः सांख्यिकीय आंकड़े एव पूर्व निश्चित उद्देश्य के लिए संप्रहृत किये जाने चाहिए।

### 6 व्यवस्थित ढंग से संप्रहृत (Collected in a Systematic Manner)

सांख्यिकीय आंकड़ों को एक व्यवस्थित ढंग से संप्रहृत किया जाना चाहिए। व्यवस्थित ढंग से एकत्र किये गए सांख्यिकीय आंकड़े अधिक शुद्ध होते हैं।

### 7 पारस्परिक सम्बन्धित आंकड़े (Capable of Being Placed in relation each other)

आंकड़े एक दूसरे से सम्बन्धित होने चाहिए। पारस्परिक सम्बन्धित आंकड़े विश्लेषण एव तुलना करने में सहायता देते हैं।

## सांख्यिकी के कार्य

### (Functions of Statistics)

#### 1 तथ्यों को स्पष्टता प्रदान करना (Presentations of Facts in a Definite Form)

सांख्यिकी तथ्यों को अका म प्रयुक्त करके अधिक विश्वसनीय और स्पष्ट बनाती है। अकों में कही हुई बात अधिक स्पष्ट होती है। उदाहरण के लिए दो वाक्यों को देखिये 1975-76 में खाद्यान्ना का उत्पादन 1974-75 से अधिक हुआ — भारत में 1975-76 में गेहूँ का उत्पादन 121 मिलियन टन था जबकि 1974-75 में इसका उत्पादन 100 मिलियन टन था। इन दोनों वाक्यों में दूसरा वाक्य अधिक स्पष्ट है क्योंकि गेहूँ के उत्पादन की अकों में सूचना देता है। इस प्रकार यह कहना कि भारत में कीमतें तेजी से बढ़ रही हैं इतना स्पष्ट या प्रभावशाली नहीं जितना कि यह कहना कि 1971-72 की तुलना में 1976-77 की धोक कीमतों में 180 प्रतिशत वृद्धि हुई। इस प्रकार हम देखते हैं कि सांख्यिकी तथ्यों को अकों में प्रस्तुत करके उन्हें अधिक स्पष्ट और विश्वसनीय बनानी है।

#### 2 तथ्यों की जटिलता को सरलता प्रदान करना (Simplifies the Complex Facts)

सांख्यिकीय विधियाँ जैसे माध्य (Mean), अपकिरण (Dispersion) इत्यादि तथ्यों की जटिलता को दूर करके उनमें सरलता लाती हैं। सांख्यिकी के द्वारा आंकड़ों तथा जटिल संप्रहृतों को छोटे से अकों में व्यक्त किया जा सकता है जिससे समस्या को आसानी से समझा जा सकता है।

### 3 तथ्यों की तुलना को सुगम करना (Facilitates Comparison of Facts)

विभिन्न सांख्यिकीय विधियाँ तथ्यों को तुलनात्मक रूप में प्रस्तुत करने में सहायता देती हैं। जिनसे सामंदायक परिणाम (conclusions) प्राप्त किए जा सकते हैं। सांख्यिकीय विधियाँ जैसे माध्य, अनुपात, प्रतिशत दर, गुणांक इत्यादि उपकरण (Tools) हैं जो तथ्यों में तुलना करना सुगम करते हैं।

### 4 तथ्यों के सम्बन्धों का अध्ययन करना (Studies Relationship between different facts)

सांख्यिकी का एक और काम यह है कि यह दो या दो से अधिक तथ्यों के बीच सम्बन्धों का अध्ययन करती है। उदाहरण के लिए माँग और पूर्ति के बीच सम्बन्ध, द्रव्य की पूर्ति और कीमत स्तर में सम्बन्ध, व्यक्तियों में कद और वजन में सम्बन्ध इत्यादि।

### 5 व्यक्तिगत अनुभव को बढ़ाना (Enlarges individual experience)

सांख्यिकी व्यक्तिगत अनुभव को बढ़ाती है और अनेक प्रकार की समस्याओं को सुलझाने में सहायता करती है। डा० ए० एल० वाचसे ने ठीक ही कहा है कि "सांख्यिकी का उचित काम निःसंदेह व्यक्तिगत अनुभव को बढ़ाना है।" (The proper function of statistics, indeed is to enlarge individual experience)

### 6 उचित नीतियों के बनाने में सहायता करना (Helps in the Formulation of Suitable Policies)

उचित नीति के बनाने में सांख्यिकीय आंकड़े अत्यन्त आवश्यक हैं। वे ऐसी नीतियों के लिए आधारभूत सामग्री हैं, उदाहरण के लिए भारत सरकार द्वारा विभिन्न वस्तुओं के आयात एवं निर्यात नीतियाँ वस्तुओं की माँग एवं पूर्ति के सहायक आंकड़ों के आधार पर ही बनायी जाती हैं।

### 7 पूर्वानुमान में सहायता देना (Helps in Fore-casting)

सांख्यिकी न केवल वर्तमान में अनुमान लगाने में सहायता देती है बल्कि भविष्य के लिए पूर्वानुमान लगाने में भी सहायता करती है, क्योंकि सांख्यिकीय विधियाँ भविष्य में होने वाली घटनाओं के सम्बन्ध में सही जानकारी दे सकती हैं। उदाहरण के लिए एक व्यापारी अपने गत वर्ष की बिक्री के आंकड़ों के आधार पर यह अनुमान लगा सकता है कि आने वाले वर्ष में वह कितनी मात्रा में माल का उत्पादन करे।

### सांख्यिकी का महत्व (Importance of Statistics)

सांख्यिकी का महत्व दिन प्रति दिन बढ़ता जा रहा है। इसका कारण यह है कि सांख्यिकी का प्रयोग अर्थशास्त्र, भौतिक शास्त्र, रसायन शास्त्र, समाजशास्त्र आदि सभी क्षेत्रों में होता है। वास्तव में आज हमें कोई भी क्षेत्र ऐसा दिखाई नहीं

देता जहाँ पर सांख्यिकी का प्रयोग न किया जाता हो। सांख्यिकी तथ्यों का सुगमता और स्पष्टता प्रदान करती है और उन्हें आसानी से समझने योग्य बनाती है। यह व्यव्यक्तिगत अनुभव को बढ़ाती एवं विस्तृत करती है।

प्राकृतिक साधन, जनसंख्या, उत्पादन, राष्ट्रीय आय, उपभोग आदि के सम्बन्ध में सांख्यिकी के बिना हमारा अध्ययन पूर्ण नहीं हो सकता। सांख्यिकी के महत्व की व्याख्या निम्नलिखित है

### 1 सांख्यिकी तथा आर्थिक आयोजन (Statistics and Economic Planning)

किसी देश के माध्यामिक प्रयोग के लिए आर्थिक आयोजन अनिवार्य होता है। आयोजन के बिना सरकार की सभी आर्थिक नीतियाँ पूर्ण रूप से सफल नहीं हो सकती। आर्थिक नीतियाँ एवं आयोजन की सफलता के लिए सांख्यिकी का प्रयोग आवश्यक है क्योंकि इन नीतियों के सम्बन्ध में सरकार द्वारा लिए गए निर्णय सांख्यिकी तथ्यों पर ही निर्भर करते हैं।

### 2 सांख्यिकी तथा व्यापार (Statistics and Business)

आज व्यापार का आकार बहुत बढ़ गया है और प्रबंधक एवं व्यापारी वर्गों का अनेक प्रकार के अनुमान लगाने पड़ते हैं। उन्हें अपनी वस्तु की पूर्ति की मात्रा माँग के अनुमानों के आधार पर ही बटानी या घटानी पड़ती है। व्यापार में लाभ सभी हो सकता है जबकि व्यापारी वस्तु की माँग का ठीक ठीक अनुमान लगा सके। परन्तु ठीक ठीक अनुमान लगाने के लिए उसे सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग करना पड़ता है। इस प्रकार व्यापार में सांख्यिकी का अत्यधिक महत्व है। सभी प्रकार की व्यापारिक गतिविधियाँ जैसे उत्पादन क्रम, विक्रम, भिन्न, श्रम, लेखा, बाजार, अनुमान, कीमत निर्धारण आदि के लिए सांख्यिकीय विधियों तथा आंकड़ों का प्रयोग करना पड़ता है। व्यापारिक अनुमान (Business forecasting) भी सांख्यिकी की सहायता से लगाय जाते हैं।

### 3 सांख्यिकी तथा अर्थशास्त्र (Statistics and Economics)

अर्थशास्त्र में ही सांख्यिकी का विशेष महत्व है। सभी प्रकार के आर्थिक विश्लेषण में आंकड़ों का प्रयोग किया जाता है। अर्थशास्त्र के सभी क्षेत्रों में महत्वपूर्ण तथ्यों में तुलना एवं सम्बन्ध सांख्यिकीय विधियों की सहायता से किया जाता है। सांख्यिकी की सहायता से माँग और पूर्ति में सामंजस्य (adjustment) किया जाता है। सांख्यिकी की सहायता से ही देश की विभिन्न समस्याओं जैसे गरीबी, बेरोजगारी, आय की असमानता इत्यादि का श्रेष्ठतम रूप से समाधान किया जा सकता है।

### 4 सांख्यिकी तथा सरकार (Statistics and Government)

आज के युग में सरकारी कार्यों में अत्यधिक वृद्धि हो गई है। आज सरकार का काम बस कायम व्यवस्था को बनाना या देश को विदेशी आक्रमणों से बचाव

ही नहीं बल्कि देश के नागरिकों के कल्याण को बढ़ाना भी है। आजकल सरकार अनेक प्रकार के कार्यों जैसे यातायात, रक्षा, रेलवे, खाद्य, वणिज्य ढाक व तार, उद्योग, कृषि व्यापार आयात व निर्यात करती है। इन सब कार्यों को कुशलतापूर्वक चलाने के लिए आँकड़ों पर निर्भर करना पड़ता है। युद्ध के समय में भी सांख्यिकी की बहुत आवश्यकता पड़ती है। युद्ध सम्बन्धी आँकड़ों के आधार पर सरकार दुश्मन की शक्ति का सही अनुमान लगा सकती है। सरकार का वार्षिक बजट भी आय-व्यय सम्बन्धी आँकड़ों के उचित समग्र और अनुमान पर आधारित होता है। अनेक कार्यों में सांख्यिकी के महत्त्व को पहचान कर ही आज सरकार सबसे अधिक आँकड़ों एकत्रित करती है।

### 5 सांख्यिकी तथा बैंकर (Statistics and the Banker)

एक बैंकर के लिए सांख्यिकी का ज्ञान बहुत लाभदायक है। सांख्यिकी की सहायता से वह व्यापार में आने वाली तेजी अथवा मंदी के बारे में जान सकता है और इस ज्ञान के आधार पर वह अपने ग्राहकों की साख (Credit) की माँग का पूर्वानुमान लगा सकता है और अपनी साख नीति का निर्माण कर सकता है। सांख्यिकी की सहायता के बिना बैंकर के पूर्वानुमान गलत हो सकते हैं और वह जनता के विश्वास का धा सकता है। जब बैंकर के लिए सांख्यिकी का ज्ञान अनिवार्य है।

### 6 सांख्यिकी तथा बीमा कम्पनियाँ (Statistics and Insurance Companies)

बीमा कम्पनियाँ सांख्यिकी का सबसे अधिक प्रयोग करती हैं। वास्तव में बीमा कम्पनियाँ जीवन तथा मृत्यु सारणियाँ (Life and Mortality Tables) के बिना अपना कारोबार कर ही नहीं सकती क्योंकि वे जीवन की प्रत्याशा (Expectation of Life) के आधार पर बीमा दरें (Premium rates) निश्चित करती हैं और जीवन की प्रत्याशा, जीवन एवं मृत्यु सारणियों के द्वारा ज्ञात की जाती है। बीमा क्षेत्र में सांख्यिकी का सम्भावना सिद्धांत (Theory of Probability) पूरा रूप से कार्य करता है और बीमा कम्पनियों की सफलता जीवन सारणियों की शुद्धता पर निर्भर करती है।

### 7 सांख्यिकी तथा मानव कल्याण (Statistics and Human Welfare)

सांख्यिकी का ज्ञान मानव कल्याण से सम्बन्धित सभी समस्याओं के समाधान के लिए महत्त्वपूर्ण है। गरीबी, बेरोजगारी, खाद्यान्न की कमी, तेजी से बढ़ती हुई कीमतें यदि समस्याओं की गम्भीरता तथा उनका हल सांख्यिकी के आँकड़ों के आधार पर ही किया जा सकता है।

### 8 सांख्यिकी तथा अनुसन्धान (Statistics and Research)

अनुसन्धानकर्ताओं के लिए सांख्यिकी का ज्ञान महत्त्वपूर्ण होता है सांख्यिकीय उपकरण (Statistical tools) अनुसन्धानकर्ताओं के लिए विशेष महत्त्व रखते हैं। सांख्यिकीय उपकरणों अथवा विधियों के द्वारा अनुसन्धानकर्ता

विभिन्न मिट्टियों पर विभिन्न प्रकार के उदरको (Fertilisers) के प्रयोग के परिणामस्वरूप फसलों की पैदावार के सम्बन्ध में परीक्षण (Experiments) करते हैं और प्राप्त परिणामों की घोषणा करते हैं जो किसानों के लिए अत्याधिक लाभदायक सिद्ध होते हैं। उत्पादन के अन्य क्षेत्रों में भी सांख्यिकीय तथ्य अनुसंधान में सहायता देते हैं।

### 9 सांख्यिकी तथा निरीक्षण (Statistics and Supervision)

प्रभावशाली निरीक्षण के लिए भी सांख्यिकी का ज्ञान अनिवार्य है। प्रत्येक समस्या चाहे वह उत्पादन या व्यापारी हो, यही चाहती है कि कम व्यय पर अधिक कामक्षमता प्राप्त हो। ऐसा तभी हो सकता है जब कि अपनाई गई नीतियों के परिणामों की जांच सांख्यिकीय आंकड़ों द्वारा की जाए। अतः यह आवश्यक है कि निरीक्षकों का उचित नीति-निर्माण के लिए सत्या द्वारा उत्पादन की मात्रा, लागत व भूतल्य स्थिति, श्रम स्थिति आदि सम्बन्धी आंकड़ों का ज्ञान हो, परन्तु यह आंकड़े सांख्यिकी के द्वारा ही प्राप्त हो सकते हैं।

### 10, सांख्यिकी तथा पूर्वानुमान (Statistics and Forecasting)

सांख्यिकीय आंकड़े तथा सांख्यिकीय विधियाँ विद्वत्सन्तोष (reliable) पूर्वानुमान लगाने में सहायता करते हैं। उदाहरण के लिए वाणिज्य एवं व्यापार मन्त्रालय तथा व्यापार मंडल आंकड़ों की सहायता से वाणिज्य एवं व्यापार के सम्बन्ध में पूर्वानुमान लगाते हैं, ऋतु विज्ञान (The Science of Meteorology) मौसम सम्बन्धी पूर्वानुमान देने के लिए आंकड़ों का प्रयोग करता है, तथा खगोल विज्ञान (Astronomy) सूर्य-ग्रहण व चन्द्रग्रहण सम्बन्धी पूर्वानुमान लगाने के लिए आंकड़ों का प्रयोग करता है।

### सांख्यिकी की सीमाएँ (Limitations of Statistics)

अब सांख्यिकी का क्षेत्र अधिक विस्तृत हो गया है। शायद ही कोई ऐसा क्षेत्र होगा जिसमें सांख्यिकी का प्रयोग न किया जाता हो। यद्यपि इसका उपयोग दिन प्रति दिन बढ़ता जा रहा है तथापि इसकी अनेक सीमाएँ हैं जिनमें से मुख्य इस प्रकार हैं

#### 1 सांख्यिकी व्यक्तिगत इकाइयों का अध्ययन नहीं करती (Statistics does not deal with Individuals)

सांख्यिकी केवल तथ्यांक समूहों का अध्ययन करती है। यह व्यक्तिगत इकाइयों का अध्ययन नहीं करती। उदाहरण के लिए प्रति व्यक्ति आय एक व्यक्ति के दुःख और पीडा के विस्तार को नहीं बता सकती। इसी प्रकार प्रति व्यक्ति आय में वृद्धि इस बात का चिन्ह नहीं कि एक गरीब व्यक्ति पहले में अच्छी स्थिति में आ गया है। इसका कारण यह है कि सांख्यिकी केवल सामूहिक व्यवहार का अध्ययन करती है। अतः यह समूह की व्यक्तिगत इकाइयों के विषय में जानकारी प्राप्त नहीं कराती।

## 2 सांख्यिकी गुणात्मक तथ्यों का अध्ययन नहीं करती (Statistics does not deal with qualitative facts)

सांख्यिकी केवल सख्यात्मक तथ्यों का अध्ययन करती है, गुणात्मक तथ्यों का नहीं। गुणात्मक तथ्यों जैसे कुशलता, ईमानदारी, बुद्धिमत्ता आदि का अध्ययन प्रत्यक्ष रूप से नहीं हो सकता। गुणात्मक तथ्यों का अध्ययन परोक्ष रूप से किया जा सकता है जैसे विभिन्न विद्यार्थियों में कुशलता की तुलना इनके द्वारा परोक्षा में प्राप्त किये गए अंकों के आधार पर की जा सकती है।

## 3 सांख्यिकीय निष्कर्ष यथाथ नहीं होते (Statistical Conclusions are not Exact)

सांख्यिकीय नियम अथ प्राकृतिक विज्ञानों जैसे भौतिक शास्त्र तथा रसायन शास्त्र की भाँति न तो यथाथ होते हैं और न ही प्रत्येक दशा में लागू होते हैं। यह नियम तो केवल औसत रूप में ही पूरे उतरते हैं। इसका कारण यह है कि यह नियम अनेक तथ्यों और कारणों से प्रभावित होते हैं।

## 4 सांख्यिकी का दुरुपयोग सम्भव है (Statistics can be Misused)

सांख्यिकी की सबसे बड़ी कमी यह है कि इसका बड़ी आसानी से दुरुपयोग हो सकता है। कोई भी अदक्ष (inexperienced) व्यक्ति सांख्यिकी विधियों का गलत प्रयोग करके कुछ भी परिणाम निकाल सकता है। इसीलिए यह कहा गया है कि "अदक्ष व्यक्ति के हाथ में सांख्यिकी विधियाँ सबसे अधिक भयानक हथियार में समान हैं क्योंकि वह उनका दुरुपयोग कर सकता है।"

## 5 सांख्यिकी समस्या का सवश्रेष्ठ हल नहीं बताती (Statistics does not provide correct Solution to the Problem)

किसी समस्या को हल करने की अनेक विधियाँ होती हैं। सांख्यिकी उनमें से केवल एक है। अतः सांख्यिकी किसी समस्या का सवश्रेष्ठ हल देने में असमर्थ है। इसलिए यह आवश्यक है कि सांख्यिकी द्वारा प्राप्त परिणामों या नियमों को अन्य विधियों द्वारा जाँच करके देखा जाये।

## सांख्यिकी की अविश्मनीयता (Distrust of Statistics)

सांख्यिकी के महत्त्व एवं उपयोगिता के होते हुए भी इसको शक्यायुक्त दृष्टि से देखा जाता है तथा इसे अविश्मनीय माना जाता है। कुछ लोगों का कहना है कि सांख्यिकी के द्वारा कोई भी बात सिद्ध की जा सकती है। जबकि कुछ लोग तो यहाँ तक कहने लगे हैं कि सांख्यिकी सब झूठा में से हीन झूठ (Worst type of lies) है। उनके अनुसार "झूठ तीन प्रकार के हैं—झूठ, सफेद झूठ और सांख्यिकी।"<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 'There are three types of lies—lies, damn lies and Statistics'



सांख्यिकी के प्रति इस प्रकार की अविश्वासनीयता (Distrust) के निम्नलिखित कारण हैं

1 अकों में सहज ही विश्वास का होना (Figures can be easily believed)

जब तथ्यों को अकों के साथ प्रस्तुत किया जाता है तो मनुष्य सहज ही उन पर विश्वास कर लेता है।

2 अकों का आसानी से शोषण किया जा सकता है (Figures can be easily Manipulated)

सही आंकड़े भी कभी-कभी चालाकी से इस प्रकार प्रस्तुत किए जा सकते हैं कि पढ़ने वाले भ्रम में पड़ जाते हैं। इस प्रकार स्वार्थी व्यक्ति गलत तथ्यों को अकों के द्वारा सही सिद्ध कर देते हैं।

चाहे सांख्यिकी के प्रति अविश्वासनीयता के कारण कुछ भी हो सांख्यिकी को इसमें दोषी नहीं ठहराया जा सकता। सांख्यिकी विधियाँ बहुत नाजुक उपकरण (Delicate tools) हैं जिनका आसानी से दुरुपयोग किया जा सकता है। अतः सांख्यिकी के प्रति अविश्वासनीयता लाने का दोष सांख्यिकीय विधियों को प्रयोग करने वाला का है न कि सांख्यिकी विज्ञान का। उदाहरण के लिए यदि एक व्यक्ति चाकू से अपनी अंगुली काट लेता है तो इसमें चाकू का कोई दोष नहीं, बल्कि उस व्यक्ति का है, क्योंकि चाकू से काम करते हुए उसको सतक रहना चाहिए था। यह भी हो सकता है कि उसने जानबूझ कर अंगुली काटी हो। ठीक इसी प्रकार यदि सांख्यिकी के उपकरणों का प्रयोग गलत तरीके से किया जाए या एक अयोग्य व्यक्ति जो कि सांख्यिकीय उपकरणों के प्रयोग को भली भाँति नहीं जानता, गलत परिणाम दे दे तो इसमें सांख्यिकी विज्ञान पर दोष नहीं लगाया जा सकता।

आर्थिक विश्लेषण में प्रयुक्त किये जाने वाले सांख्यिकीय उपकरण (Statistical tools used in Economic analysis)

जब सांख्यिकी एक बचन में प्रयोग होता है तो इसका भाव सांख्यिकी विज्ञान (Science of Statistics) अथवा सांख्यिकीय विधि से होता है। सांख्यिकी विज्ञान सांख्यिकीय सिद्धांतों एवं विधियों को बताता है। आर्थिक विश्लेषण में प्रयोग होने वाले सांख्यिकीय उपकरण अथवा विधियाँ निम्नलिखित हैं

1 आंकड़ों का संग्रह (Collection of Data)

आर्थिक विश्लेषण के लिए सर्वप्रथम आंकड़ा का संग्रह किया जाता है। संग्रहित आंकड़े आर्थिक विश्लेषण के लिए प्राथमिक सामग्री (raw material) होते हैं। आंकड़ा का संग्रह करने के लिए हम प्रायः यादन (Sampling) या सगणना (Census) विधियों का प्रयोग करते हैं। आंकड़े सांख्यिकी अनुसंधान का आधार हैं। सांख्यिकी उन सभी विधियों का विवेचन करती है जिन्हें द्वारा आंकड़ा का संग्रह किया जा सकता है।

2 आंकड़ों का व्यवस्थिकरण (Organisation of Data)

सांख्यिकी आंकड़ा को व्यवस्थित करने की विधियों का विवेचन करता है।

व्यवस्थित आकड़े ही विश्लेषण के लिए उपयोगी हो सकते हैं। आकड़ा का वर्गीकरण (Classification) और सारणीकरण (Tabulation) द्वारा व्यवस्थित किया जाता है।

### 3 आकड़ों का प्रस्तुतीकरण (Presentation of Data)

आकड़ों का सग्रह करने तथा व्यवस्थित करने के पश्चात् प्रस्तुत किया जाता है। आकड़ा का प्रस्तुतीकरण बिन्दु-रेखाआ, मानचित्रों, बक्का तथा ग्राफो द्वारा किया जाता है। आकड़ा के प्रस्तुतीकरण का मुख्य उद्देश्य यह है कि उनको आसानी से समझा जा सके।

### 4 आकड़ों का विश्लेषण (Analysis of Data)

आर्थिक विश्लेषण के लिए सांख्यिकीय निष्कर्षों का प्राप्त करने के लिए आकड़ा का विश्लेषण करना भी अनिवार्य है। केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप (Measures of Central Tendency), अपसरण के माप (Measures of Dispersion), विषमता के माप (Measures of Skewness) सह-सम्बन्ध (Correlation), सूचकांक (Index numbers) आदि आकड़ा के विश्लेषण की मुख्य विधियाँ हैं।

### 5 आकड़ों का निबचन (Interpretation of Data)

आकड़े अपने आप कुछ नहीं कह सकते। अतः इनका निबचन करना भी आवश्यक है। आकड़ों के निबचन से अभिप्राय एकत्रित तथा विश्लेषित आकड़ा से निष्कर्ष निकालना होता है। यह कार्य एक कठिन कार्य है और इसको करने में लिए एक विशेष प्रकार की योग्यता व अनुभव का होना आवश्यक है।

### 6 पूर्वानुमान (Forecasting)

प्रतिगमन (regression), बाह्यगमन, घूर्णन वगैरह विधियाँ द्वारा आकड़ा सम्बन्धी पूर्वानुमान लगाए जाते हैं जिन पर अनेक आर्थिक नीतियाँ आधारित हैं।

## अभ्यास के लिए प्रश्न

### (Exercises)

1 प्रयोगसिद्ध विश्लेषण तथा सध्यात्मक विश्लेषण में अन्तर कीजिए। उनका क्या महत्त्व है ?

2 सांख्यिकी की परिभाषा कीजिए। इसकी प्रमुख विशेषताएँ क्या हैं ?

3 सांख्यिकी के महत्त्वपूर्ण कार्य क्या हैं ?

4 आधुनिक आर्थिक व्यवस्था में सांख्यिकी का महत्त्व उदाहरण सहित दीजिए।

5 अधशास्त्रियाँ, व्यापारियों तथा सरकार के लिए सांख्यिकीय ज्ञान के लाभ को बताइए।

6 "सांख्यिकी कुछ भी सिद्ध कर सकती है—यह कथन कहाँ तक शुद्ध है। विवेचना कीजिए।"

7 सांख्यिकी की सीमाओं तथा अविश्वमनीयता पर आलोचनात्मक टिप्पणियाँ लिखिए ।

8 सांख्यिकी के बिना नियोजन बिना रेडार और कम्पास का जहाज है ।” इस कथन के सन्दर्भ में भारत के नियोजित विकास में सांख्यिकी के महत्त्व की व्याख्या कीजिए ।

9 व्यापार और आर्थिक नियोजन में सांख्यिकी के महत्त्व की व्याख्या कीजिए ।

10 आर्थिक विश्लेषण में प्रयुक्त किए जाने वाले सांख्यिकीय उपकरणों अथवा विधियों को संक्षेप में बताइए ।

11 सांख्यिकीय विधियों तथा परीक्षण विधियों में अंतर स्पष्ट कीजिए ।

12 “अंकिते भवतु दर्जे के झूठ हैं ।”—विवेचना कीजिए ।

13 सांख्यिकी, सांख्यिकीय विधियों तथा सांख्यिकीय आंकड़ों की धारणाओं को स्पष्ट कीजिए ।

14 आर्थिक विश्लेषण में सांख्यिकी के महत्त्व पर प्रकाश डालिए ।

15 “सांख्यिकीय विधियाँ एक अकुशल व्यक्ति के हाथों में खतरनाक मंत्र हैं ।”

उपयुक्त कथन का आशय समझाइए ।

## खण्ड 2 (UNIT—2)

### आकड़ों का सकलन एवं व्यवस्थीकरण

#### (COLLECTION & ORGANISATION OF DATA)

##### अध्याय 2

### सांख्यिकीय आकड़ों का स्वरूप

### प्राथमिक व द्वितीय आकड़ों

#### (NATURE OF STATISTICAL DATA PRIMARY AND SECONDARY DATA)

##### आकड़ों का सकलन (Collection of Data)

सांख्यिकीय कार्य में आकड़ा के सकलन का विशेष महत्व है। आकड़ा का सकलन सांख्यिकी विज्ञान की मूलभूत क्रिया है। सकलित आकड़े सांख्यिकीय अनुसंधान का आधार हैं। आकड़ा का सकलन करने वाला व्यक्ति अनुसंधानकर्ता (Investigator) कहलाता है। अनुसंधानकर्ता के सम्मुख एक निश्चित तथ्य (Specific Phenomenon) होता है जिसे सांख्यिकीय अनुसंधान (Statistical Enquiry) कहा जाता है।

सांख्यिकीय अनुसंधान (Statistical Enquiry) का आयोजन करने से पहले अनुसंधानकर्ता को अनेक प्रारम्भिक बातों पर विचार करना पड़ता है

(1) अनुसंधानकर्ता को इस बात की जानकारी प्राप्त होनी चाहिए कि सांख्यिकीय अनुसंधान सहायक रूप में व्यापक होने योग्य है अथवा नहीं। ऐसे कथन 'नेहरू कितना महान था।', 'अरविन्द घोष कितना पवित्र था' सहायक में व्यक्त नहीं किये जा सकते, अतः उन पर सांख्यिकीय विधियाँ लागू नहीं होती। किन्तु सहायक तथ्य जैसे भारत में प्रति हेक्टर गेहूँ का औसत उत्पादन क्या है? भारत की प्रति व्यक्ति आय क्या है? भारत की कुल जनसंख्या कितनी है? सांख्यिकीय अनुसंधान के उचित प्रश्न हैं।

(2) अनुसंधानकर्ता का काय आरम्भ करने से पहले सांख्यिक अनुसंधान (Statistical Enquiry) के उद्देश्य का भी भली-भांति समझ लेना आवश्यक है। इससे उसे यह पता लग जाता है कि किस प्रकार के आंकड़े एकत्र किए जाय और किस प्रकार उनका प्रयोग किया जाये।

(3) अनुसंधानकर्ता का अनुसंधान के क्षेत्र का स्पष्ट ज्ञान होना चाहिए अर्थात् अनुसंधानकर्ता को इस बात की भी जानकारी हानी चाहिए कि किस प्रकार की सूचना एकत्र करनी है? क्या विषय सामग्री है? और कितना विस्तृत क्षेत्र है?

(4) अनुसंधानकर्ता का अनुसंधान (Enquiry) के उद्देश्य के अनुसार सांख्यिकीय इकाइया की परिभाषा अच्छी तरह से निश्चित करनी चाहिए। सांख्यिकीय इकाई मापने का वह साधन है जिसके आधार पर आंकड़े एकत्र करके प्रस्तुत व विश्लेषित किये जाते हैं। निश्चित की गई इकाई मरन, स्टाट तथा स्थायी हानी चाहिए।

(5) अनुसंधान आरम्भ करने से पहले अनुसंधानकर्ता का सूचना-स्रोत को निश्चित कर लेना चाहिए। सूचना स्रोत दो प्रकार के हो सकते हैं—प्राथमिक (Primary) तथा द्वितीयक (Secondary)। जब अनुसंधानकर्ता स्वयं जाँच का सकलन करता है तो उनको प्राथमिक आंकड़े कहा जाता है परन्तु प्रकाशित अथवा अप्रकाशित लेखा से आंकड़ों को प्राप्त किया जाता है तो ऐसे आंकड़ा का द्वितीयक आंकड़े कहा जाता है।

#### प्राथमिक आंकड़े (Primary Data)

प्राथमिक आंकड़े वे आंकड़े हैं जिनको अनुसंधानकर्ता अपने काय के लिए पहली बार संचित करता है। इन आंकड़ा का मौलिक आंकड़े कहा जाता है और यह सांख्यिकीय विधियों के लिए कच्चे माल का काम करने हैं।

#### प्राथमिक आंकड़ों के सकलन की विधियाँ (Methods of Collecting Primary Data)

प्राथमिक आंकड़ा का संग्रह करने की प्रमुख विधियाँ निम्नलिखित हैं

(1) परत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान (Direct Personal Investigation)

(2) अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान (Indirect Oral Investigation)

(3) सहायदाताओं द्वारा सूचना

(Information through Correspondents)

- (4) डाक द्वारा भेजी गई प्रश्नावली द्वारा अनुसंधान  
(Investigation through Mailed Questionnaire)
- (5) गुणको द्वारा अनुसंधान  
(Investigation through Enumerators)

### 1 प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान (Direct Personal Investigation)

इस विधि से सकलित किए गये आंकड़े अधिक विश्वसनीय होते हैं क्योंकि अनुसंधानकर्ता स्वयं उन लोगों के पास जाता है जिनसे सूचना प्राप्त करनी होती है। ऐसे लोगों को सूचक (Respondents) कहा जाता है। इस विधि में अतिसूक्ष्म अनुसंधानकर्ता सूचक से सीधे सम्पर्क में आता है। अतः उसे चतुर, मध्य तथा नम्र होना चाहिए। उदाहरण—इस विधि में अनुसार यदि हमने एक बस्ती के मजदूरों के उपभाग स्तर का अध्ययन करना है तो अनुसंधानकर्ता का स्वयं उस बस्ती में जाना होगा और प्रत्येक मजदूर परिवार का स्वयं भ्रमण कर उस अपने कार्य के लिए वांछित आंकड़ों का संचयन करना होगा।

प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान के लाभ (Merits of Direct Personal Investigation)

(1) इस विधि के अनुसार सकलित किए हुए आंकड़े अधिक विश्वसनीय होते हैं।

(2) इस विधि द्वारा सूचना अधिक स्पष्ट होती है क्योंकि अनुसंधानकर्ता अतिरिक्त प्रश्न पूछकर हर प्रकार की अस्पष्टता को दूर कर सकता है।

(3) आंकड़ों के संचयन में एकरूपता बनी रहती है।

(4) जहाँ अनुसंधान का क्षेत्र छोटा है यह विधि बहुत उपयुक्त है।

प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान की सीमाएँ (Limitations of Direct Personal Investigation)

(1) इस विधि का प्रयोग तभी हो सकता है जब अनुसंधान का क्षेत्र बहुत सीमित हो।

(2) इस विधि में अनुसंधानकर्ता के व्यक्तिगत पक्षपात का प्रभाव अधिक पड़ता है।

(3) इस विधि में व्यय और समय अधिक लगता है।

(4) इस विधि में प्रशिक्षित अनुसंधानकर्ताओं की आवश्यकता होती है।

### 2 अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान (Indirect Oral Investigation)

इस विधि में अनुसंधानकर्ता स्वयं सूचक के पास नहीं जाता बल्कि वह किसी अन्य व्यक्तियों, जिन्हें वांछित जानकारी के बारे में कुछ ज्ञान होता है, से सूचना प्राप्त करता है। उदाहरण के लिए यदि किसी कारखाने में आग लग गई है तो इस अवस्था में अनुसंधानकर्ता कारखाने के मालिकों और कर्मियों के आसपास रहने वाले व्यक्तियों से आग लगने के बारे में मौखिक सूचना प्राप्त करेगा। परन्तु अनुसंधानकर्ता को उही व्यक्तियों से सूचना प्राप्त करनी

चाहिए जिन्हे समस्या से सम्बन्धित ज्ञान हो, जो पक्षपात रहित हो। ऐसे लोगों, जिनसे पूछताछ की जाती है को साक्षी (Witnesses) कहा जाता है। इस विधि की सफलता अनुसंधानकर्ता की चतुराई, बुद्धिमत्ता, नम्रता आदि पर निर्भर करती है। प्रायः जांच सन्नितियों और भायोगो द्वारा इन विधि का प्रयोग किया जाता है।

**अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान के लाभ (Merits of Indirect Oral Investigation)**

(1) आग, चोरी, चूना आदि की घटनाओं में जहाँ सूचना से प्रत्यक्ष सम्पर्क सम्भव नहीं हो सकता यह विधि ही काम आती है।

(2) इस विधि में अनुसंधानकर्ता के व्यक्तिगत पक्षपात का प्रभाव का डर नहीं होता।

(3) इस विधि में पक्ष और विपक्ष दोनों प्रकार के विचार प्राप्त होते हैं जिनके आधार पर सत्य का अनुमान लगाया जा सकता है।

(4) जहाँ सूचना का क्षेत्र विस्तृत होना है, यह विधि अधिक लाभदायक होती है।

**अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान की सीमाएँ (Limitations of Indirect Oral Investigation)**

(1) सूचना अथवा साक्षिया द्वारा गलत सूचना प्राप्त होने की सम्भावना रहती है।

(2) इस विधि में साक्षिया या सूचना की लापरवाही के कारण अशुद्ध आँकड़ा प्राप्त होने की सम्भावना रहती है।

(3) इस विधि में सूचना अथवा साक्षिया के पक्षपात का डर रहता है। अतः इन विधि का सावधानी से प्रयोग करना चाहिए।

**3. सवाहदाताओं द्वारा सूचना (Information through Correspondents)**

इस विधि में अनुसंधान अधिकारी उन स्थानों पर, जहाँ से सूचना एकत्र करनी होती है, स्थानीय एजेंटों जिन्हे सवाहदाता कहते हैं, को नियुक्त करता है। ये सवाहदाता वांछित सूचना एकत्रित करते हैं और उसे अनुसंधान अधिकारी के पास भेजते रहते हैं। अनुसंधान अधिकारी विभिन्न स्थानों से दगा, हडताल, दुर्घटना आदि के बारे में सूचना इस विधि द्वारा प्राप्त करता है।

इस विधि की सफलता इस बात पर निर्भर करती है कि सवाहदाता कहीं तक योग्य, विवक्षणीय तथा निष्पक्ष है।

**सवाहदाता द्वारा सूचना विधि के लाभ (Merits of Information through Correspondents)**

(1) जब सूचना का क्षेत्र अत्यन्त विस्तृत हो तो यह विधि अधिक उपयुक्त सिद्ध होती है।

(2) इस विधि में पैसा और समय कम लगता है ।

(3) पैदावार सम्बन्धी अनुमान (Crop estimates), कीमतों सम्बन्धी सूचनाएँ आदि प्राप्त करने के लिए यह एक उचित विधि है क्योंकि इन सूचनाओं में अधिक शुद्धता की आवश्यकता नहीं चाहिए ।

(4) इस विधि द्वारा लगातार सूचनाएँ प्राप्त होती रहती हैं जिनके आधार पर विभिन्न अनुमानों की घोषणा होती रहती है ।

सवाददाता द्वारा सूचना विधि की सीमाएँ (Limitations of Information through Correspondents)

(1) यह विधि विश्वसनीय नहीं क्योंकि मौखिक आँकड़ों का अभाव रहता है ।

(2) इस विधि से प्राप्त सूचना या आँकड़ों में उच्च स्तर की शुद्धता नहीं होती, नवल सन्निकट (approximate) शुद्धता ही पाई जाती है ।

(3) इस विधि द्वारा एकत्रित आँकड़ों में एकरूपता की कमी होती है ।

(4) इस विधि से प्राप्त सूचनाओं पर सवाददाता के पक्षपात की सम्भावना रहती है ।

4 डाक द्वारा भेजी गई प्रश्नावली द्वारा अनुसंधान (Investigation through Mailed Questionnaire)

इस विधि में अनुसंधानकर्ता पूछताछ सम्बन्धित प्रश्नों की एक सूची तैयार करके मुद्रित करवाता है । प्रश्नों के साथ ही उत्तर देने के लिए खाली स्थान रखा जाता है । इस प्रश्नावली का सभी सम्बन्धित व्यक्तियों अर्थात् सूचकों के पास डाक द्वारा भेज दिया जाता है । प्रत्येक प्रश्नावली के साथ एक अनुरोध-पत्र भेजा जाता है जिसमें सूचना एकत्रित करने का उद्देश्य, उत्तर भरने की विधि तथा उसको भरकर वापस भेजने का पता और तारीख भी लिखी होती है । अनुरोध पत्र में सूचकों को इस बात का भी विश्वास दिलाया जाता है कि उनके द्वारा दिये गये उत्तरों का गुप्त रखा जायेगा । प्रश्नावली को वापस भेजने का डाक खर्च भी प्रायः अनुसंधानकर्ता द्वारा पहले से दिया हुआ होता है । इस विधि का प्रयोग तभी सफल हो सकता है जब कि सूचक शिक्षित, सावधान और उत्तर देने वाले हों ।

डाक द्वारा भेजी गई प्रश्नावली द्वारा अनुसंधान के लाभ (Merits of Investigation through Mailed Questionnaire)

(1) इस विधि में पैसा, समय और परिश्रम की बचत होती है ।

(2) यदि जाँच का क्षेत्र अधिक विस्तृत हो तो यह विधि अधिक उपयोगी मानी जाती है ।

(3) इस विधि के अन्तर्गत मौखिक आँकड़ों का सफलतापूर्वक किया जा सकता है ।



(4) इस विधि में वाछित सूचना उच्च स्तर की हो सकती है।

डाक द्वारा भेजी गई प्रश्नावली द्वारा अनुसंधान की सीमाएँ (Limitations of Investigation through Mailed Questionnaire)

(1) यह विधि केवल शिक्षित सूचका के लिए ही प्रयुक्त हो सकता है।

(2) प्रायः सूचक प्रश्नावली का भरना में रुचि नहीं लेते। अतः सूचना वशुद्ध हा बनना है।

(3) कुछ लागू सूचना देना से घबराने हैं और प्रश्नावली को अनुसंधानकर्ता के पास वापिस भेजते ही नहीं।

(4) इस विधि में पूरक प्रश्न नहीं पूछे जा सकते। अतः अगुद्ध उत्तरों की सम्भावना बनी रहती है।

(5) इस विधि के अंतर्गत भेजे गए उत्तरों की जाँच करनी कठिन होती है।

5 गणकों द्वारा भेजी गई प्रश्नावली द्वारा अनुसंधान (Investigation through Schedules or Questionnaire Sent Through Enumerators)

इस विधि में सूचना प्राप्त करने के लिए गणक (enumerators) का नियुक्त किया जाता है। गणक प्रशिक्षित तथा विशिष्ट व्यक्ति होते हैं। गणक द्वारा सूचका के पास बुद्धित फार्म (Schedules or Questionnaire) भेज दिए जाते हैं। गणक इन फार्मों या प्रश्नावलियों को सूचका द्वारा भरवाने में सहायता करने हैं और भरवाने के पश्चात् उन्हें अनुसंधानकर्ता के पास भेज देते हैं। यह विधि सरकार द्वारा जनगणना आदि के लिए प्रयोग की जाती है। आजकल कुछ अनुसंधान संस्थाएँ जैसे N C E A R आदि भी इस विधि का प्रयोग करने लगी हैं। इस विधि की सफलता गणक की बुद्धिमत्ता, ईमानदारी, मेहनत तथा काय बगलता पर निर्भर करती है।

गणकों द्वारा भेजी गयी प्रश्नावली द्वारा अनुसंधान के लाभ (Merits of Schedules Sent through Enumerators)

(1) यह विधि अशिक्षित सूचका के लिए भी प्रयोग की जा सकती है क्योंकि गणक स्वयं जाकर प्रश्नावली का भरावत है।

(2) इस विधि से सूचका के असहयोग की सम्भावना कम होती है क्योंकि गणक स्वयं जाकर सूचना प्राप्त करते हैं।

(3) इस विधि द्वारा प्राप्त सूचना अधिक शुद्ध होती है क्योंकि गणक पूरक प्रश्न पूछ कर शुद्ध उत्तर प्राप्त कर सकते हैं।

(4) इस विधि द्वारा प्राप्त सूचना पर व्यक्तिगत पक्षपात का प्रभाव बहुत कम पड़ता है।

(5) इस विधि में सूचका द्वारा सभी प्रश्नों के उत्तरों का प्राप्त किया जा सकता है।

(6) यह विधि विस्तृत जांच के क्षेत्र के लिए उपयुक्त है ।

गणको द्वारा भेजी गयी प्रश्नावली द्वारा अनुसंधान की सीमाएँ (Limitations of Questionnaire or Schedules Sent through Enumerators)

(1) यह विधि बहुत महँगी पडती है क्योंकि गणको को काफी वेतन देने पडते है ।

(2) इस विधि में गणका के पक्षपात की भावना के कारण अशुद्ध परिणाम प्राप्त हो सकते है ।

(3) इन विधि में समय और परिश्रम अधिक लगता है क्योंकि गणको द्वारा सूचको से सम्पर्क करने में काफी समय लगता है ।

(4) इस विधि की सबसे बड़ी सीमा यह है कि इसमें बड़ी सख्या में कुशल और परिशिक्षित गणका की आवश्यकता होती है ।

प्रश्नावली तैयार करना (Construction of Questionnaire)

'प्रश्नावली' किसी अनुसंधान अथवा जांच से सम्बंधित कुछ प्रश्नों का संग्रह है जाकि पहले से ही तैयार किया गया हाता है । प्रश्नावली तैयार करते समय निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखना चाहिए ।

(1) प्रश्नों की सख्या (Number of Questions)

जहाँ तक सम्भव हो प्रश्नों की सख्या कम होनी चाहिए । प्रश्नावली में उही प्रश्नों का रखना चाहिए जिनका समास्या से सीधा सम्बन्ध हो । अनावश्यक प्रश्नों को प्रश्नावली में शामिल नहीं करना चाहिए । बड़े आकार की प्रश्नावली को भरने में सूचका का समय अधिक लगता है और इसलिए वह प्रश्नावली भरने के कार्य का टालने का प्रयत्न करेगे ।

(2) सरल और स्पष्ट प्रश्न (Simple and Straightforward Questions)

प्रश्नावली में दिये गये प्रश्न सरल तथा स्पष्ट हाने चाहिए ताकि सूचक इन्हें आसानी से समझ सकें । पेचादा, लम्बे तथा दोहराये गये वाले प्रश्नों का प्रयोग नहीं करना चाहिए क्योंकि ऐसे प्रश्न उत्तरदाता का द्विविधा तथा असमझ में डाल देते हैं तथा वह उत्तर देना ही पसंद नहीं करता ।

(3) प्रश्नों का क्रम (Sequence or Order of Questions)

प्रश्नावली में प्रश्नों का एक उचित क्रम से रखा जाना चाहिए ताकि उचित उत्तर प्राप्त हो सके । प्रश्नों का आगे-पीछे देने से उत्तर ठीक ढंग से नहीं दिया जाता । उदाहरण के लिए निम्न प्रश्न उचित क्रम (Logical Sequence) में हैं

(क) क्या आप नौकरी करते हैं ?

(ख) आपकी आय क्या है ?

(ग) आप कितनी बचत करते हैं ?

परन्तु यदि एक व्यक्ति से यह पूछे बिना कि वह नौकरी या कोई अन्य कार्य करता है या नहीं, उसकी आय तथा बचत पूछना उचित नहीं। इसी प्रकार यदि एक व्यक्ति से पहले यह पूछा जाए कि उसके कितने बच्चे हैं ? और बाद में यह पूछा जाए कि वह विवाहित है या नहीं—उचित नहीं। उचित क्रम तो यह है कि पहले उस व्यक्ति से यह पूछा जाये कि वह विवाहित है या नहीं और बाद में यह पूछा जाये कि उसके कितने बच्चे हैं ?

#### 4 उचित प्रश्न (Desirable Questions)

प्रश्नावली में ऐसे प्रश्न शामिल नहीं करने चाहिए जो सूचको में उत्तेजना (Irritation) पैदा करने वाले हों या उनके निजी व्यक्तित्व को ठेस पहुँचाने वाले हों क्योंकि वे ऐसे प्रश्नों का उत्तर देने से इंकार कर देंगे। उदाहरण के लिए यदि किसी व्यक्ति से यह पूछा जाए कि क्या उसने अपनी पत्नी को पीटना बंद कर दिया है ? तो वह अवश्य ही उत्तेजित होगा और उसका उत्तर नहीं देगा। इसी प्रकार यदि किसी व्यक्ति से यह पूछा जाये कि क्या वह जुवा खेलता है ? तो वह उसका उत्तर नहीं देगा और यदि देगा तो अशुद्ध होगा। अतः प्रश्नावली में ऐसे प्रश्न जिनका उत्तर देने में सूचको के आत्मसम्मान व उनकी आर्थिक व सामाजिक भावनाओं को ठेस लगे, शामिल नहीं करने चाहिए।

#### 5 प्रश्नों के प्रकार (Type of Questions)

##### (क) सामान्य विकल्प प्रश्न (Simple Alternative Questions)

विकल्प प्रश्न वे प्रश्न होते हैं जिनका उत्तर 'हाँ' या 'नहीं', 'गलत' या 'सही' में दिया जाता है। उदाहरण के लिए क्या आप धूम्रपान करते हैं ? क्या आपके घर में टेलीफोन है ? क्या आप विवाहित हैं ? आदि प्रश्नों का उत्तर केवल 'हाँ' या 'नहीं' में दिया जा सकता है।

##### (ख) बहुविकल्प प्रश्न (Multiple Choice Questions)

बहुविकल्प प्रश्न वे प्रश्न हैं जिनके कई सम्भव उत्तर हो सकते हैं। ऐसे प्रश्नों के सभी सम्भव उत्तर प्रश्नावली में दिये हुए होते हैं। सूचक उनमें से जिस उत्तर को ठीक समझता है उस पर निशान लगा देता है। उदाहरण के लिए निम्न प्रश्नों को देखिए

(1) आप आने-जाने के लिए कौन-सा साधन प्रयोग करते हैं ?

(एक वर्ग में क्रस लगाइए)

(क) कार

(ख) मोटर-साइकिल

(ग) बस

(घ) साइकिल

(ii) आपकी विवाह सम्बन्धी स्थिति (Marital Status) क्या है ?

(एक वग में क्रम लगाइए)

- (क) अविवाहित
- (ख) विवाहित
- (ग) त्यागा हुआ (Divorced)
- (घ) रडुआ (Widower)
- (ङ) अलग हुआ हुआ (Separated)

(iii) आपने अपना मकान क्यों बेचा ?

(एक वग में क्रम लगाइए)

- (क) कर्जा चुकाने के लिए
- (ख) व्यापार करने के लिए
- (ग) लड़की के विवाह के लिए
- (घ) लड़के की पढाई के लिए
- (ङ) अथवा कोई कारण

(ग) खुले प्रश्न या स्वतंत्र उत्तर प्रश्न (Open and or Free Questions)

इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर के लिए सूचको को पूर्ण स्वतंत्रता दी जाती है। उदाहरण के लिए मशाबदी पर आप अपने विचार बीजिए—एक स्वतंत्र उत्तर प्रश्न है। परन्तु ऐसे प्रश्नों का उत्तर देने के लिए सूचको का अधिक समय लगता है अतः इनका उत्तर देना बे छोड़ ही देते हैं। इसलिए उत्तम यही है कि पहली या दूसरी श्रेणी के प्रश्न अधिक से अधिक दिये जाने चाहिए।

(घ) विशिष्ट प्रश्न (Specific Questions)

इस प्रकार के प्रश्नों का उद्देश्य एक विशिष्ट प्रकार की जानकारी को प्राप्त करना होता है। उदाहरण के लिए आपका व्यवसाय क्या है ? आपकी मासिक आय क्या है ? आदि विशिष्ट प्रकार के प्रश्न हैं।

(ङ) निर्देश (Instructions)

प्रश्नावली में सूचको के लिए प्रश्नावली में उत्तर का ढंग प्रश्नावली को वापिस भेजने की तारीख, पता, उत्तर देने के लिए माप की इकाई क्या हो—आदि निर्देशों का होना भी आवश्यक है।

(च) पृष्ठ के नीचे की टिप्पणी (Footnote)

प्रश्नावली में दिए गए प्रश्नों में से यदि किसी विशेष प्रश्न के बारे में विस्तृत सूचना की आवश्यकता हो तो उस पर निशान लगा देना चाहिए तथा उसकी व्याख्या नीचे टिप्पणी में करनी चाहिए।

(छ) प्रश्नावली की पूब जाँच (Pretesting of Questionnaire)

प्रश्नावली में लिखे गए प्रश्नों को सूचका तक पहुँचाने से पूब उसकी जाँच कर लेना भी आवश्यक है। सीमित व्यक्तिगत पर इन पर प्रश्नों की जाँच करने से

प्रश्ना के सम्बन्ध में बहुत सी सम्भावित त्रुटिया का पता चल जाता है और बड़े पैमाने पर सर्वेक्षण से पहले उनमें सुधार किया जा सकता है।

प्रश्नावली का नमूना

(A Specimen of Questionnaire)

फार्मिकस—बम्बई

सलग्न पत्र (Covering Letter)

महोदय

हमें आशा है कि आप हमारे फार्मिकस प्रयोग करते होंगे। कृपया भेजी गई प्रश्नावली में दिए गए प्रश्नों का स्पष्ट (Frank) उत्तर दीजिए। हम आपका विश्वास दिलाते हैं कि आप से प्राप्त सूचना गुप्त रखी जायेगी और उसका दुरुपयोग नहीं किया जायेगा। हमारा आशंका है कि आप इस प्रश्नावली को भर कर एक मास तक हमारे पास भेज दीजिए। इसका वापस भेजने का डाक खर्च पहले से ही दे दिया गया है।

धन्यवाद,

भवदीय,

मैसज "X" फार्मिकस

नोट—कृपया एक वग में जहाँ आवश्यक हो सही '✓' का निशान लगाइय।

- |  |                                       |   |  |
|--|---------------------------------------|---|--|
| 1 नाम -----  | 2 आयु-----                            |   |  |
| 3 पता -----  | 4 लिंग पुरुष <input type="checkbox"/> | स्त्री <input type="checkbox"/>         |  |
| 5 विवाहित <input type="checkbox"/>                     | अविवाहित <input type="checkbox"/>     |   |  |
| 6 नौकरी <input type="checkbox"/>                       | व्यापार <input type="checkbox"/>      | अन्य <input type="checkbox"/>           |  |
| 7 मासिक आय   | 8 परिवार के सदस्यों की संख्या         |   |  |
| रु० 500 से कम <input type="checkbox"/>                 | 1 से 3 <input type="checkbox"/>       |   |  |
| 500 से 1000 <input type="checkbox"/>                   | 3 से 6 <input type="checkbox"/>       |   |  |
| 1000 से 1500 <input type="checkbox"/>                  | 6 से ऊपर <input type="checkbox"/>     |   |  |
| 1500 से ऊपर <input type="checkbox"/>                   |                                       |   |  |
| 9 हमारा कौन सा फार्मिकस आप सबसे अधिक पसंद करते हैं ?   |                                       |   |  |
| सूटिंग <input type="checkbox"/>                        | गटिंग <input type="checkbox"/>        | ड्रेस मैटिरियल <input type="checkbox"/> |  |
| 10 क्या आप हमारा फार्मिकस इमतिहान पसंद करते हैं कि     |                                       |   |  |
| (i) उनके उचित मूल्य हैं ? हाँ <input type="checkbox"/> | नहीं <input type="checkbox"/>         |   |  |
| (ii) वे निश्चित (Fixed) मूल्य पर मिलते हैं ?           |                                       |   |  |
| हाँ <input type="checkbox"/>                           | नहीं <input type="checkbox"/>         |   |  |
| (iii) उन्हें आपका मूल्य पसंद करने और प्रयोग करते हैं ? |                                       |   |  |
| हाँ <input type="checkbox"/>                           | नहीं <input type="checkbox"/>         |   |  |

11 आप किस कारण हमारा फ़ाब्रिकस पसंद करते हैं ?

- (i) डिजाइन (Design) हाँ  नहीं   
 (ii) पदार्थ की उत्तमता हाँ  नहीं   
 (iii) पक्के रंग हाँ  नहीं

12 आप एक मास में कितनी बार हमारे फ़ुटकर बिक्री स्टोर पर जाते हैं ?

- 1-2  2-4  4 से अधिक

13 क्या आप किसी विशेष दिन हमारे फ़ुटकर बिक्री स्टोर पर जाना पसंद करते हैं ? हाँ  नहीं

यदि हाँ, किस दिन ?

- रवि  साम  मंगल  बुध   
 वार  शुक्र  गनि

14 क्या आपका हमारा फ़ाब्रिकस महंगा लगता है ?

- हाँ  नहीं

15 आप विक्रेता (Salesman) को हमारे बिक्री स्टोर में किस स्थिति में पाते हैं ?

- (क) आकर्षित  अनाकर्षित   
 (ख) नम्र  कठोर   
 (ग) सहायतागोल  गैर सहायतागोल   
 (घ) कुशल  अकुशल

16 क्या आप पुरुष विक्रेता के स्थान पर महिला विक्रेता पसंद करते हैं ?

- हाँ  नहीं

17 क्या आप स्टोर द्वारा कपड़ा बाँधने की सामग्री से सन्तुष्ट हैं ?

- हाँ  नहीं

18 आपके विचार में कौन-से फ़ाब्रिक में सुधार की आवश्यकता है ?

- सूटिंग  शर्टिंग  साड़ियाँ   
 ड्रेस मैटेरियल

19 आपके विचार में क्या हमारा फ़ुटकर बिक्री स्टोर ठीक स्थान पर स्थित है ?

20 सुधार के लिए सुझाव -----

(यदि आवश्यकता है तो जलग बाग़ जोड़िए)

तिथि

हस्ताक्षर -----

## द्वितीयक आँकड़ों का सकलन (Collections of Secondary Data)

द्वितीय आँकड़े वह आँकड़े हैं जिनका सकलन अथ व्यक्ति या व्यक्तियों द्वारा पहले से ही किया हुआ होता है, और अनुसंधानकर्ता उन्हें अपने कार्यों में प्रयोग करता है।

प्राथमिक और द्वितीयक आँकड़ों में अंतर अति सूक्ष्म है। आँकड़े जो किसी एक व्यक्ति के लिए प्राथमिक होते हैं तो दूसरे व्यक्ति के लिए द्वितीयक बन जाते हैं। आँकड़ा जो संग्रह करने वाले व्यक्ति या संस्था के लिए वह आँकड़े प्राथमिक कहलाते हैं परंतु अथ सभी व्यक्ति या संस्थाएँ, जो इनका प्रयोग करते हैं, उनके लिए यह आँकड़े द्वितीयक बन जाते हैं। उदाहरण के लिए चुनाव कार्यालय द्वारा संचालित आँकड़े उस कार्यालय के लिए प्राथमिक होंगे परंतु जब इन आँकड़ों का प्रयोग अथ व्यक्तियों या संस्थाओं द्वारा किया जाता है तो उनके लिए वे आँकड़े द्वितीयक होते हैं।

द्वितीयक आँकड़ा के दो मुख्य स्रोत हैं

(क) प्रकाशित स्रोत (Published Source)

(ख) अप्रकाशित स्रोत (Unpublished Source)

(क) प्रकाशित स्रोत (Published Source)

(i) अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन (International Publication)—अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन संस्थान जैसे संयुक्त राष्ट्र संघ, विश्व बैंक (World Bank), अन्तर्राष्ट्रीय श्रम संगठन (I L O), अन्तर्राष्ट्रीय मुद्रा कोष (I M F) तथा विदेशी सरकारें अनेक प्रकार के आँकड़े एवं रिपोर्ट प्रकाशित करती हैं। इनके द्वारा प्रकाशित आँकड़ा का द्वितीयक आँकड़ों (Secondary Data) के रूप में प्रयोग किया जाता है।

(ii) सरकारी प्रकाशन (Government Publication)—हमारे देश में केन्द्रीय सरकार तथा राज्य सरकारें अपने अपने विभाग के सम्बन्ध में आँकड़े प्रकाशित करती रहती हैं। प्रमुख सरकारी प्रकाशन निम्नलिखित हैं जनगणना रिपोर्ट (Census Report) रिजर्व बैंक बुलटिन (Reserve Bank Bulletins), पंचवर्षीय योजनाएँ (Five year Plans), करणी और वित्तीय रिपोर्ट, चुनाव कार्यालय (Election Office) द्वारा संचालित आँकड़े, अखिल भारतीय ग्रामीण सर्वेक्षण रिपोर्ट (All India Rural Credit Survey Reports) आदि।

(iii) अर्ध-सरकारी संस्थाओं के प्रकाशन (Semi Government Publications)—विभिन्न अर्ध-सरकारी संस्थाएँ भी अनेक प्रकार के आँकड़े प्रकाशित करती रहती हैं जो द्वितीयक आँकड़ों के रूप में प्रयोग हो सकते हैं। उदाहरण के लिए स्थानीय सरकारें (Local Governments) जैसे नगर पालिकाएँ या नगर निगम, जन्म मरण, स्वास्थ्य, शिक्षा आदि से सम्बन्धित आँकड़े समय-समय पर प्रकाशित करती रहती हैं। इन आँकड़ों का प्रयोग विभिन्न प्रकार के अनुसंधानों में किया जाता है।

फाइनेन्शियल एक्सप्रेस (The Financial Express),  
 ईस्टर्न इकनॉमिस्ट (Eastern Economist)  
 इकनॉमिक रिव्यू (Economic Review),  
 कामर्स (Commerce), कैपिटल (Capital),

(vii) शोध संस्थाओं और व्यक्तिगत अनुसंधानकर्ताओं द्वारा प्रकाशित (Publication of Research Institutes and Individual Researchers):  
 शोध संस्थाओं तथा व्यक्तिगत अनुसंधानकर्ताओं द्वारा प्रकाशित आंकड़ों का प्रयोग भी द्वितीयक आंकड़ों के रूप में किया जा सकता है।

(ख) अप्रकाशित स्रोत (Unpublished Sources)

सरकारी, अर्द्ध-सरकारी, शोध संस्थाएँ, निजी संस्थाएँ, आदि इनके काम के लिए कुछ सांख्यिकीय तथ्यों का शोरा रखते हैं। यह इन आंकड़ों को प्रकाशित नहीं करते परन्तु ऐसे आंकड़ों को द्वितीयक आंकड़ों के रूप में प्रयोग किया जा सकता है।

द्वितीयक आंकड़ों के प्रयोग में सावधानियाँ (Precautions in the Use of Secondary Data)

द्वितीयक आंकड़ों का सदैव विश्वसनीय नहीं होने का खतरा रहता है। वे सही हो सकते हैं जैसे पदापातपूर्ण, अपर्याप्त आदि के कारण परन्तु अनेक सम्बन्धी अशुद्धियों से युक्त, आदि। इसलिए द्वितीयक आंकड़ों का प्रयोग अनुसंधानकर्ता को निम्नलिखित बातों का ध्यान रखना चाहिए—



- (1) आँकड़े व्यक्तिगत पक्षपात से मुक्त हों।
- (2) आँकड़े प्रस्तुत अनुसंधान के लिए ठीक प्रतिनिधि हों।
- (3) आँकड़े प्रस्तुत अनुसंधान के उद्देश्य के लिए अनुकूल एवं पर्याप्त हों।
- (4) आँकड़ों को एकत्रित करने में शुद्धता का उचित स्तर रखा गया हो।

यदि उपर्युक्त बातों का ध्यान में रखा जायेगा तो द्वितीयक आँकड़े शुद्ध और विश्वसनीय हो सकते हैं और आर्थिक विश्लेषण में इनकी उपयोगिता बढ़ जायेगी।

### आँकड़ों का सम्पादन

#### (EDITING OF DATA)

आँकड़ों के सम्पादन का कार्य एक महत्वपूर्ण परंतु कठिन कार्य होता है। इस कार्य को करने का मुख्य उद्देश्य एकत्रित आँकड़ों तथा सूचनाओं में त्रुटियों का सशोधन करना होता है। यदि सम्पादन का कार्य ठीक ढंग से नहीं होगा तो आँकड़ों तथा सूचनाओं का एकत्र करने में की गई मेहनत बेकार हो जायेगी। अतः सम्पादन का कार्य केवल जिम्मेदार और अनुभवी व्यक्तियों को ही सौंपा जाना चाहिए।

आँकड़ों तथा सूचनाओं के सम्पादन से अभिप्राय उनकी सब प्रकार से जाँच—जैसे पूर्णतया सगति, शुद्धता, एकरूपता—करने से होता है। जैसे ही प्रश्नावलियाँ तथा अनुसूचियाँ केन्द्रिय कार्यालय में पहुँचें उनकी पूर्णतया जाँच हानी चाहिए ताकि उनकी पूर्णता तथा शुद्धता का पता लग सके। इस अवस्था में उनमें पाई जाने वाली त्रुटियों में असंगतियाँ (Inconsistencies) तथा भूलो (Omissions) की जाँच की जाती है। दापपूर्ण प्रश्नावलियों तथा अनुसूचियों को सशोधन के लिए वापिस भेजा जाता है। परंतु भरसक प्रयत्न करने पर भी यदि उनमें किसी प्रश्नावली या अनुसूची के दोष ठीक नहीं होते तो ऐसी प्रश्नावली या अनुसूची को छोड़ देना चाहिए।

### अभ्यास के लिए प्रश्न

#### (EXERCISES)

- 1 प्राथमिक और द्वितीयक आँकड़ों में भेद बताइए। अपने उत्तर को उदाहरणों द्वारा स्पष्ट कीजिए।
- 2 आँकड़ों के सकलन का कार्य आरम्भ करने से पूर्व आप किन किन बातों पर विचार करेंगे—उल्लेख कीजिए।
- 3 प्राथमिक आँकड़ों की परिभाषा दीजिए तथा इनको एकत्र करने की विभिन्न विधियाँ बताते हुए उनके गुणों व दोषों पर प्रकाश डालिए।
- 4 द्वितीयक आँकड़ों के सकलन के विभिन्न स्रोतों का विवरण दीजिए।

5 द्वितीयक आंकड़ा के प्रयोग से पहले आप क्या सावधानियाँ करेंगे ? व्याख्या कीजिए ।

6 "प्रश्नावली" क्या है ? प्रश्नावली तैयार करने के मौलिक सिद्धांतों की व्याख्या कीजिए ।

7 एक श्रेष्ठ प्रश्नावली के गुणों को बताइए तथा एक श्रेष्ठ प्रश्नावली का नमूना (Specimen) दीजिए ।

8 'द्वितीयक आंकड़ों को पूर्ण जाँच के बिना कभी नहीं ग्रहण करना चाहिए ।'

उपर्युक्त कथन की विवेचना कीजिए ।

9 प्राथमिक आंकड़ों का सम्पादन करते समय किन किन मुद्दों का ध्यान रखना चाहिए ?

10 अनुसंधान की प्रश्नावली विधि की व्याख्या कीजिए । क्या प्रश्नावली डाक द्वारा भेजी जानी चाहिए या स्वयं गणकों (enumerators) द्वारा जाकर भरवाई जानी चाहिए ?

---

## सगणना तथा निदर्शन विधियाँ (CENSUS AND SAMPLING METHODS)

आँकड़ा को एवत्र करने की सगणना तथा निदर्शन विधियों को समझने से पहल हम सगणना (Census) तथा निदर्शन (Sample) शब्दा के अर्थ को जान सना अधिक लाभदायक होगा।

### सगणना अथवा जनसंख्या (Population)

सांख्यिकी में सगणना अथवा जनसंख्या शब्द का अर्थ इसके साधारण अर्थ से भिन्न है। जनसंख्या का साधारण अर्थ तो उन सभी व्यक्तियों से होता है जो एक देश अथवा भू-खण्ड में रहते हैं। परन्तु जनसंख्या अथवा सगणना का सांख्यिकी में अर्थ समस्या या अनुसंधान (Enquiry) सम्बन्धी सभी इकाइयों के समूह से होता है। उदाहरण के लिए यदि हम एक कक्षा जिसमें 40 विद्यार्थी हैं, के कद और ऊँचाई का सम्बन्ध में जाँच करना चाहते हैं तो सब के सब 40 विद्यार्थी ही हमारी "जनसंख्या" होंगी। सांख्यिकी में जनसंख्या का समग्र (Universe) भी कहा जाता है।

### नमूना (Sample)

जनसंख्या अथवा सगणना का भाग जिसका हम अध्ययन करना चाहते हैं, का नमूना (Sample) कहते हैं। नमूना जनसंख्या जिसका हम अध्ययन करना चाहते हैं, में से लिया गया एक छोटा-सा हिस्सा होता है। उदाहरण के लिए जब हम एक कक्षा के 40 विद्यार्थियों के कद और ऊँचाई का अध्ययन करना चाहते हैं तो उन 40 विद्यार्थियों में से यदि हम विश्लेषण के लिए 8 विद्यार्थी चुन लें तो उन 8 विद्यार्थियों का नमूना (Sample) कहेंगे।

आँकड़ों के सफलता के लिए दो विधियाँ का प्रयोग किया जाता है

- 1 सगणना या जनसंख्या विधि (Census Method) और
- 2 निदर्शन विधि (Sampling Method)

### 1 सगणना या जनसंख्या विधि (Census Method)

इस विधि के अंतर्गत समस्या या अनुसंधान से सम्बन्धित समस्त इकाइयों का अध्ययन किया जाता है। उदाहरण के लिए यदि एक कारखाने, जिसमें 200 कर्मचारी काम करते हैं, के बतंग के सम्बन्ध में जानकारी प्राप्त करना चाहते हैं तो हम प्रत्येक कर्मचारी से सम्पर्क करके उसके वेतन के बारे में जानकारी प्राप्त करना होगा। भारत सरकार द्वारा दस वर्षों के बाद भारत की जनसंख्या की गणना इसी विधि के अनुसार की जाती है।

### सगणना विधि के लाभ (Merits of Census Method)

1. समस्या या अनुसंधान सम्बन्धी सभी इकाइया का अध्ययन किया जाता है जिसका कारण आँकड़ों में शुद्धता अधिक होती है।
2. इस विधि के अनुसार किए गए अनुसंधान में पक्षपात का प्रभाव कम होता है।
3. इस विधि के द्वारा विस्तृत सूचना प्राप्त हो जाती है जिससे परिणाम अधिक विश्वसनीय होते हैं।

### सगणना विधि की सीमाएँ (Limitations of Census Method)

1. इस विधि द्वारा किए गए सर्वेक्षण पर अधिक धन परिश्रम व समय लगता है।
2. इस विधि में अधिक गणना की आवश्यकता होती है परंतु संकुशल ईमानदार और परिश्रमी गणन जामानी से नहीं मिलते।
3. कहीं-कहीं विषय परिस्थितियों में इस विधि का प्रयोग नहीं किया जा सकता।

### 2. निदर्शन विधि (Sampling Method)

निदर्शन विधि में अध्ययन अथवा अनुसंधान के लिए "जनसंख्या" में से कुछ प्रतिनिधि इकाइया को चुन लिया जाता है और उनके अध्ययन के आधार पर 'जनसंख्या' का विश्लेषण किया जाता है। उदाहरण के लिए मान लीजिए कि दिल्ली विश्वविद्यालय के छात्रावास (Hostel) में रहने वाले 2000 विद्यार्थियों के औसत मासिक व्यय का जानना चाहते हैं। इस विधि के अंतर्गत हम जनसंख्या अर्थात् 2000 विद्यार्थियों में से केवल कुछ (मान लीजिए 200) विद्यार्थियों का चुन लेते हैं। इन 200 विद्यार्थियों जिन्हें 'नमूना' (Sample) कहा जाता है के अध्ययन के आधार पर हम निष्कर्ष निकाल लेते हैं जो कि 2000 विद्यार्थियों के मासिक व्यय के सम्बन्ध में ठीक होगा।

### निदर्शन विधि के लाभ (Merits of Sampling Method)

नाटिकों के लिए आजकल निदर्शन विधि लोकप्रिय बन गई है। इसका कारण यह है कि इस विधि को जनसंख्या विधि (Census Method) की तुलना में निम्नलिखित लाभ हैं

#### 1. धन और समय में बचत (Saving of Time and Money)

निदर्शन विधि में सगणना विधि की तुलना में अंकड़ों के संचयन और विश्लेषण पर कम व्यय होता है। इसका कारण यह है कि इस विधि में कम सूचना नष्ट करने की होती है। काय कम होता है और इसीलिए कम व्यय की आवश्यकता पड़ती है। भारत जैसे विकासशील देशों के लिए यह विधि अधिक उपयुक्त होती है क्योंकि इन देशों में साधनों की कमी होती है। कार्य कम हान व क्षति इस विधि में समय भी कम लगता है।

## 2 अधिक गहन सूचना (More Detailed Information)

निर्देशन विधि के अतगत जनसंख्या विधि की तुलना में अधिक गहन सूचना प्राप्त की जा सकती है क्योंकि इनमें अध्ययन के लिए जनसंख्या का केवल एक छोटा सा भाग होता है। अतः जब अधिक गहराई तक की जा सकती है।

## 3 अधिक विश्वसनीय परिणाम (More Dependable Information)

निर्देशन विधि द्वारा सकलित आँकड़े अधिक विश्वसनीय होते हैं क्योंकि इनमें शुद्धता का स्तर अपेक्षाकृत अधिक ऊँचा होता है। इसका कारण यह है कि निर्देशन विधि के अतगत आँकड़ों के मकलन एवं विश्लेषण के लिए प्रशिक्षित और विशिष्ट कर्मचारियों जैसे गणकों की सेवाओं की आसानी से प्राप्त किया जा सकता है।

## 4 अधिक वैज्ञानिक (More Scientific)

निर्देशन विधि जनसंख्या विधि से अधिक वैज्ञानिक मानी गई है क्योंकि इसमें परिणामों की विश्वसनीयता की जाँच की जा सकती है।

## 5 केवल यही विधि (The Only Method)

कुछ विशेष परिस्थितियों में केवल निर्देशन विधि का ही प्रयोग किया जा सकता है, जनसंख्या विधि नहीं। उदाहरण के लिए यदि एक चाक बनाने वाला कारीगर चाका के टूटने की क्षमता (Breakings Strength of Chalks) की जाँच करना चाहता है तो उसे निर्देशन विधि का अपना पड़ेगा क्योंकि जनसंख्या विधि के अनुसार तो उसे सभी चाका को तोड़कर देखना पड़ेगा और इस प्रकार उसके पास सभी टूटे हुए चाक रह जाएंगे।

## निर्देशन विधि की सीमाएँ (Limitations of Sampling Method)

निर्देशन विधि की निम्नलिखित सीमाएँ हैं

### 1 सर्वेक्षणों में अधिक सावधानी (More Careful Surveys)

इस विधि के अतगत कुछ परिणामों को प्राप्त करने के लिए निर्देशन सर्वेक्षणों को बड़ी सावधानी से करना पड़ता है। थोड़ी सापरवाही करने से निर्देशन (Sample) जनसंख्या का ठीक रूप से प्रतिनिधित्व नहीं कर सकता, अतः परिणाम अशुद्ध और भ्रमपूर्ण हो सकते हैं।

### 2 विशिष्ट सेवाओं की आवश्यकता (Need for Expert Services)

निर्देशन सर्वेक्षण के लिए प्रशिक्षित व विशिष्ट व्यक्तियों की सेवाओं की आवश्यकता रहती है। ऐसे व्यक्तियों की कमी होने से निर्देशन सर्वेक्षण में परिणाम अशुद्ध और भ्रमपूर्ण हो सकते हैं।

3 अधिक समय, परिश्रम और धन (More Time, Labour and Money)

जटिल निदर्शन सर्वेक्षणों (Complicated Sampling) में समय, परिश्रम और धन अधिक लगता है।

4 भ्रम बढ़ते हैं (Surveys Errors are Multiplied)।

निदर्शन विधि में भ्रमों (Errors) के अनेक स्रोत हैं और प्रत्येक सर्वेक्षण में जटिलता आने से भ्रम बढ़ते जाते हैं।

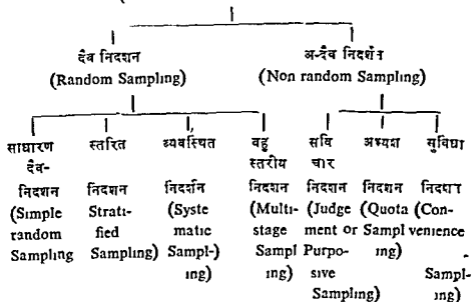
यादृश चयन विधियाँ (Methods of Selecting a Sample)

निदर्शन चयन की दो विधियाँ हैं

(i) दैव निदर्शन (Random Sampling)

(ii) अ-दैव निदर्शन (Non random Sampling)

निदर्शन चयन की विधियाँ  
(Methods of Selecting a Sample)



1 दैव निदर्शन (Random Sampling)

दैव निदर्शन विधि में जनसंख्या (Census) की प्रत्येक इकाई को यादृश (Sample) में शामिल होने का पूरा मौका मिलता है। दूसरे शब्दों में यादृश का चुनाव पूर्ण रूप से संयोगवत् (Chance) होता है और कोई भी व्यक्ति पहले से यह नहीं जानता कि जनसंख्या या समग्र की कौन सी इकाई या मद यादृश में शामिल होगी। इसी कारण इस विधि को संयोगवत् निदर्शन (Chance Sampling) विधि भी कहा जाता है।

## द्वैत निदर्शन के प्रकार (Types of Random Sampling)

द्वैत निदर्शन की चार प्रमुख विधियाँ हैं

- (1) साधारण द्वैत-निदर्शन (Simple Random Sampling)
- (2) स्तरित निदर्शन (Stratified Sampling)
- (3) व्यवस्थित निदर्शन (Systematic Sampling)
- (4) बहुस्तरीय निदर्शन (Multistage Sampling)

### (1) साधारण द्वैत निदर्शन (Simple Random Sampling)

इस विधि का स्वतंत्र द्वैत निदर्शन भी कहा जाता है क्योंकि इस विधि के अंतर्गत जनसंख्या की प्रत्येक इकाई या मद को यादृश (Sample) में स्वतंत्रतः - पूर्वक शामिल होने का अवसर मिलना है। इस प्रकार से चयन किया गया 'यादृश' (Sample) जनसंख्या का प्रतिनिधि (representative) होता है और उनमें जनसंख्या की विशेषताएँ पाई जाती हैं।

साधारण द्वैत-निदर्शन विधि द्वारा 'यादृश' चयन की प्रमुख विधियाँ निम्न-लिखित हैं

(क) लाटरी विधि (Lottery Method)

(ख) द्वैत संख्याओं की सारणी (Table of Random Numbers)

### (क) लाटरी विधि (Lottery Method)

यह विधि सबसे अधिक प्रचलित है। इस विधि के अनुसार जनसंख्या अथवा समूह की सभी इकाइयों के नाम या संख्या को पत्रियाँ डाली जाती हैं और उन्हें अच्छी तरह से मिलाकर किसी अज्ञेय व्यक्ति या व्यक्तिगता द्वारा उन पत्रियों में से वाञ्छित संख्या में पत्रियाँ निकाल ली जाती हैं और इस प्रकार 'यादृश' का चुनाव हो जाता है। परंतु इस विधि में यह बात ध्यान रखने योग्य है कि सभी पत्रियों का आकार एक रूप एक जसा होना चाहिए ताकि पत्रियों निकालने वाला किसी प्रकार का पक्षपात न कर सके।

### (ख) द्वैत संख्याओं की सारणी (Table of Random Numbers)

इस विधि के अनुसार उन सभी इकाइयों को जिनको धनुस घान में सम्मिलित करना होता है, क्रम शृंखला के अनुसार अंकित कर दिया जाता है। इसके पश्चात् द्वैत-संख्याओं की सारणी (Table of Random Numbers) की सहायता से जितनी इकाइयाँ 'यादृश' के लिए चाहिए होती हैं चुन ली जाती हैं। द्वैत-संख्याओं की सारणियों में टिप्पेट की द्वैत-संख्याओं की सारणी (Tippet's Table of Random Numbers) अधिक प्रयोग में लाई जाती है। टिप्पेट (Tippet) ने 41600 अंकों (digits) के प्रयोग से 10400 चार-चार अंकों (four digits) वाली संख्याओं की सारणी दी है। इन संख्याओं में जी गई 25 संख्याएँ नीचे उदाहरण के रूप में दी गई हैं

54463	41417	96754	98614	75884
15389	28354	34357	24856	16777
85941	17783	06318	96887	46230
61149	40950	62111	90801	42902
05219	82995	47534	55165	81007

टिप्पेट की दैव सट्याओ की सारणी का प्रयोग करने की विधि एक उदाहरण से स्पष्ट हो जायेगी। मान लीजिए कि हम 200 गाँवों के एक ब्लॉक में रहने वाले किमान परिवारों के उपभोग के प्रति रूप (Consumption pattern) का अध्ययन करना चाहते हैं और यह भी मान लीजिए कि हमने दैव-निर्देशन विधि से 5 गाँवों का यादश (Sample) के रूप में चुना है। इसके लिए हम टिप्पेट की दैव-सट्याओ की सारणी का प्रयोग कर सकते हैं। उसकी सारणी में से ली गई 25 सट्याओं ऊपर दाईं हैं। सबसे प्रथम हम सभी 200 गाँवों पर 1 से 200 तक सट्याओं का क्रम देते हैं। तत्पश्चात् टिप्पेट की सट्याओ की सारणी के पहले स्तम्भ (Column) से आरम्भ करते हैं। चाहे हम आरम्भ के तीन अंकों (digits) का लेंते हैं या न तब भी तीन अंकों का। आओ हम आरम्भ के तीन अंकों लेंते हैं। टिप्पेट की सारणी की सारणी में से (पहले स्तम्भ में आरम्भ करके) उन सभी नम्बरों का या सट्याओ का छाड़ने जाइए जो 200 से अधिक है और उनका चुनते जाइए जो 200 या 200 से कम है। इस विधि से चुने गए गाँवों की सट्याएँ इस प्रकार हैं

153, 052, 177, 063, और 167

इस प्रकार के पाँच गाँव जिनके नम्बर (सट्या) ऊपर दिये गए हैं हमारा यादश (Sample) होगा। इस विधि द्वारा चयन किया गया यादश जनसट्या का प्रतिनिधि होगा।

## (2) स्तरित निदर्शन (Stratified Sampling)

स्तरित निदर्शन की विधि के अंतर्गत, जनसट्या या समग्र का विभिन्न विनियोजन के आधार पर कई स्तरों (Strata) या खण्डों में बाँटा जाता है। तत्पश्चात् प्रत्येक स्तर (Strata) से दैव निदर्शन विधि (Random Sampling Method) द्वारा यादश की इकाइयों का चुनाव कर लिया जाता है। वास्तव में यह विधि मन्विकार निदर्शन तथा दैव निदर्शन विधियों का मिश्रण है। यह विधि इन दोनों विधियों के दोषों को दूर करती है। अतः इसके द्वारा चुना हुआ समग्र (Universe) का उचित प्रतिनिधि होता है।

## (3) व्यवस्थित निदर्शन (Systematic Sampling)

आजकल व्यवस्थित दैव-निदर्शन विधि का अधिक प्रयोग हो रहा है। इस विधि में अंतर्गत जनसट्या या समग्र की समस्त इकाइयों का सट्यात्मक या अथवा क्रमिक आधार पर क्रम कर दिया जाता है, तत्पश्चात् एक निश्चित क्रम के अनुसार यादश के लिए विनियोजित इकाइयों की आवश्यकता होती है, चुने ली जाती है।



उदाहरण के लिए एक कक्षा के 50 विद्यार्थियों की सूची प्राप्त है और हम 5 विद्यार्थियों का एक 'यादश' लेना चाहते हैं। 'यादश' की यह सख्या तब मिल सकती है जब हर 10वाँ विद्यार्थी चुन लिया जाये, 1 से 10 के बीच का लडका देव द्वारा (at random) चुना जायेगा। मान लीजिए कि यह 5वाँ लडका है। अब हम 15वाँ, 25वाँ, 35वाँ, और 45वाँ लडका लेंगे। यह 5 लडके हमारा 'यादश' होगा। इस विधि के अंतगत जनसख्या की प्रत्येक इकाई को 'यादश' में सम्मिलित होने का पूरा अवसर प्राप्त होता है।

### व्यवस्थित निदर्शन के लाभ (Merits of Systematic Sampling)

(1) यह सरल देव-निदर्शन या स्तरित निदर्शन की तुलना में अधिक सुविधाजनक है।

(2) इस विधि द्वारा 'यादर्श' के चयन में समय बर्न लगता है परंतु परिणाम उतने ही शुद्ध निकलते हैं जितने कि अ य विधिया द्वारा।

(3) इस विधि द्वारा 'यादर्श' के चयन में परिश्रम और धन भी कम 'य' होता है।

(4) यदि पूरा सूची को देव द्वारा क्रम में कर लिया जाये तो परिणाम अधिक शुद्ध प्राप्त हो सकते हैं।

### व्यवस्थित निदर्शन की सीमाएँ (Limitations of Systematic Sampling)

(1) यह विधि तभी अपनाई जा सकती है जबकि इकाइया की पूर्ण सूची उपलब्ध हो।

(2) यदि निदर्शन विस्तार (Sampling Interval) में कोई सामाजिक दोष (Periodic Limitation) हो तो हमारे परिणाम अशुद्ध हो सकते हैं।

### 4 बहुस्तरीय निदर्शन (Multi stage Sampling or cluster Sampling)

इस प्रकार के निदर्शन में 'यादर्शन' कई स्तरों में लिया जाता है और इसी कारण इसे बहुस्तरीय निदर्शन विधि (Multi stage Sampling) कहा जाता है। इस रीति को क्षेत्र निदर्शन (Area Sampling) भी कहा जाता है क्योंकि इसमें 'यादर्श' का चयन प्रायः क्षेत्र के आधार (area or geographical basis) जैसे शहरों, गाँवों, ब्लॉकों इत्यादि पर किया जाता है। इस रीति में 'यादर्श' के लिए सबसे प्रथम पहले स्तर पर समय से देविक निदर्शन द्वारा इकाइयाँ चुनी जाती हैं, तत्पश्चात् दूसरे स्तर पर प्रथम स्तर से प्राप्त सामग्रियों से इकाइयाँ चुनी जाती हैं, इत्यादि। एक उदाहरण द्वारा यह रीति स्पष्ट हो जायेगी। मान लीजिए कि हम पंजाब राज्य के लोहा के उपभाग प्रतिरूप (consumption pattern) का अध्ययन करना चाहते हैं। पहले स्तर पर हम देविक रीति द्वारा पंजाब राज्य के शहरों व गाँवों को चुने लेंगे। दूसरे स्तर पर इन चुने हुए प्रत्येक शहर व गाँव से देविक रीति द्वारा कुछ परिवारों को चुन लिया जायेगा। अंत में तीसरे स्तर पर इन चुने

हुए परिवारा मे से दैविक रीति द्वारा कुछ व्यक्तियों का एक यादश चुन लिया जायेगा ।

### बहुस्तरीय निदर्शन के लाभ (Merits of Multi stage Sampling)

1 इस रीति मे प्रत्येक-स्तर पर "यादश का आकार छोटा होता जाता है ।

इसलिए यह रीति विस्तृत क्षेत्रों में अनुसंधान के लिए बहुत उपयोगी है ।

2 इस रीति में जनसंख्या की प्रत्येक इकाई को यादश में सम्मिलित होने का पूरा अवसर प्राप्त होता है ।

3 इस रीति में समय, परिश्रम और धन की बचत होती है ।

### बहुस्तरीय निदर्शन की सीमाएँ (Limitations of Multi stage Sampling)

(1) जब अनुसंधान का क्षेत्र छोटा होना है तो यह रीति उपयुक्त नहीं है ।

(2) निदर्शन के प्रत्येक स्तर पर अत्यधिक आयोजन की आवश्यकता पड़ती है ।

### (ii) अ-द्वैव निदर्शन (Non random Sampling)

अद्वैव निदर्शन में यादश का चयन सयोग (Chance) पर निर्भर नहीं करता बल्कि कि ही अर्थ धारणाओं पर निर्भर करता है । इसके अन्तर्गत यादश का चयन निम्न रीतियों की सहायता से किया जाता है

(1) अद्वैव अथवा सविचार निदर्शन (Deliberate or Purposive or Judgement Sampling)

(2) अमयश निदर्शन (Quota Sampling)

(3) सुविधा निदर्शन (Convenience Sampling)

(1) अद्वैव अथवा सविचार निदर्शन (Deliberate or Purposive Sampling)

इस विधि या रीति के अंतर्गत अनुसंधानकर्ता अपनी इच्छा से आवश्यकता के अनुसार यादश के लिए समग्र (universe) में से इकाइयों को चुन लेता है । अतः इस रीति में समग्र या जनसंख्या की सभी इकाइयों का यादश में सम्मिलित होने का अवसर नहीं मिलता । न्यायिक चयन की यह रीति अद्वैव-निदर्शन (Non-random Sampling) रीति कहलाती है ।

(2) अमयश निदर्शन (Quota Sampling)

इस रीति के अंतर्गत गणको (Enumerators) की सेवाओं का प्रयोग किया जाता है । गणको के लिए यादश लेने के लिए समग्र में से अमयश (Quota) निर्दिष्ट कर दिया जाता है । गणको का अमयश दिवस होने के पश्चात् प्रत्येक गणको अपनी इच्छा से यादशों की इकाइयों को चुनता है । उदाहरण के लिए एक गणको को अनुसंधान से सम्बंधित 200 व्यक्तियों से जानकारी प्राप्त करनी है ।

साथ ही उसको यह भी निर्देश दिया जाता है कि सर्वेक्षण में 25 प्रतिशत गृहणियाँ हों, 25 प्रतिशत उत्पादन हों, 20 प्रतिशत निश्चित आय वगैरह का व्ययित हों, 15 प्रतिशत व्यापारी वर्ग हों और शेष 15 प्रतिशत बौद्धिक वर्ग (Intellectual Class) हों इस प्रकार गणक को इस निश्चित अभयश के अनुसार ही 'याद' का चुनाव करना पड़ता है। परन्तु अभयश की सीमा में वह अपनी इच्छा से समग्र की किसी भी इकाई का चुन सकता है।

एक उदाहरण द्वारा यह रीति स्पष्ट हो जायेगी। मान लीजिए कि हम दिल्ली के कालेजों के विद्यार्थियों में धूम्रपान (smoking) की आदत का अध्ययन करना चाहते हैं। प्रत्येक गणक या अनुसंधानकर्ता के लिए 10 कालेजों का अभयश (Quota) निश्चित कर दिया जाता है। इस अभयश में दो महिला कालेज, एक सह-शिक्षा (Co education) कालेज, एक लड़कियों का कालेज, दो आठम कालेज और दो उच्चतर कालेज सम्मिलित हैं और अनुसंधानकर्ता का यह भी प्राप्ति दिया गया है कि प्रत्येक कालेज से वह 50 विद्यार्थियों का अनुसंधान के लिए चुने। परन्तु इस अभयश की सीमा के अंतर्गत अनुसंधानकर्ता प्रत्येक कालेज में अपनी इच्छा से 50 विद्यार्थियों का अनुसंधान के लिए चुन सकता है।

### (3) सुविधा निदर्शन (Convenience Sampling)

इस रीति के अंतर्गत यादश का चयन अनुसंधानकर्ता की सुविधा पर निर्भर करता है। अनुसंधानकर्ता अपनी सुविधा के अनुसार समग्र का कुछ भाग 'याद' के लिए चुन लेता है। अनुसंधानकर्ता की सुविधा याद लेने के समय स्थान और साधनों के उपलब्ध हान से प्रभावित होती है। इस रीति द्वारा प्राप्त परिणाम सतुष्टोपजनक व शुद्ध नहीं हो सकते क्योंकि इस रीति में यादश का चुनाव न तो दैव निदर्शन और न ही मविचार निदर्शन पर निर्भर करता है।

### यादश-आकड़ों की विश्वसनीयता (Reliability of Sample data)

निदर्शन रीति इस मान्यता (assumption) पर आधारित है कि यादश के आधार पर जो भी निष्कर्ष निकाले जाते हैं वे समग्र या जनसंख्या पर भी लागू होते हैं। हमारी यह मान्यता निम्नलिखित दो महत्वपूर्ण सिद्धांतों पर आधारित है

(क) सांख्यिकीय नियमितता नियम (Law of Statistical Regularity) और

(ख) महाक स्थिरता नियम (Law of Inertia of Large Numbers)

(क) सांख्यिकीय नियमितता नियम (Law of Statistical Regularity)

सांख्यिकीय नियमितता नियम सिद्धांतिक रूप से निदर्शन (Sampling) का आधार है। यह नियम बताता है कि समग्र या जनसंख्या में से दैव निदर्शन द्वारा पर्याप्त संख्या में इकाइयों का चुन लिया जाये, तो इन इकाइयों में औसत

रूप से समग्र के सभी भुण विद्यमान होंगे। दूसरे शब्दा में यदि समग्र में से देव-निदर्शन द्वारा यादश लिया जाए और उसके आधार पर परिणाम निकाले जायें तो वे लगभग उन परिणामों के समान ही होंगे जोकि समग्र के आधार पर निकाले जायेंगे। इस प्रकार यह नियम हमें बताता है कि हम समग्र अथवा जनसंख्या की विशेषता का अध्ययन केवल उसके यादश के आधार पर कर सकते हैं। इसलिए यह सिद्धांत बहुत उपयोगी है। इसकी सहायता से समय तथा धन की बचत होती है। महा यह बात याद रखनी चाहिए कि सगणा रीति (Census method) तथा निदर्शन रीति (Sampling method) द्वारा प्राप्त परिणाम सवथा एक नहीं हो सकते क्योंकि यादश तो समग्र का केवल एक छोटा सा भाग होता है। फिर भी इन दोनों विधियों से प्राप्त परिणामों में अधिक अंतर नहीं होगा। उदाहरणार्थ सगणना रीति से एक स्कूल के छात्रावास के 50 विद्यार्थियों का औसत मासिक व्यय 300 रुपये है और यदि निदर्शन रीति से औसत व्यय निकाला जाये तो यह 310 रुपये या 290 रुपये हो सकता है। इस प्रकार हम देखते हैं कि दोनों रीतियों से प्राप्त परिणाम चाहे पूणत एक से नहीं है फिर भी इनमें अधिक अंतर नहीं हो सकता।

#### (ख) महांक स्थिरता नियम (Law of Inertia of Large Numbers)

यादश के आकार के सम्बन्ध में कोई निश्चित नियम नहीं है। महांकस्थिरता नियम यह बताता है कि यदि अथ बातें यथापूर्वक रह तो यादश का आकार जितना बड़ा होगा, परिणाम उतना ही अधिक शुद्ध होगा।" इसका कारण यह है कि जब अथ बहुत अधिक संख्या में होते हैं तो उनमें क्षतिपूर्क (Compensatory) क्रिया को अधिक अवसर मिलता है जिसके परिणामस्वरूप उनमें अधिक स्थिरता पाई जाती है और अथों में अधिक स्थिरता के कारण परिणाम अधिक शुद्ध होते हैं। उदाहरणार्थ यदि एक सिक्के को 10 बार उछाला जाए तो सम्भव है कि पहली बार 10 उछालों (Tosses) में 7 बार चित (Head) आये, तो और 3 बार पट (Tail) आये। परंतु दूसरी बार जब इस सिक्के को 10 बार उछाले दिये जाएंगे तो सम्भव है कि स्थिति विपरीत हो जाये और 7 बार पट (Tail) और 3 बार चित (Head) आये। इस प्रकार 20 बार सिक्का उछालने से 10 बार चित और 10 बार ही पट आये। परंतु यह परीक्षण बहुत ही कम संख्या में किया गया है। इसलिए हो सकता था कि 10 बार चित तथा 10 बार पट न आते। परंतु जब सिक्के को 100 बार (या इससे भी अधिक अर्थात् 1000 बार) उछाला जाए तो 50 बार चित और 50 बार पट (500 बार चित और 500 बार पट) आने की अधिक सम्भावना की जा सकती है। हम एक और उदाहरण लेते हैं। मान लीजिए उत्तर प्रदेश के देहरादून जिले में 1000 की उपज में वष प्रति-वष अधिक परिवर्तन हात हैं परंतु पूरे उत्तर प्रदेश में प्राप्त में चावल की उपज में सम्भवतः कोई परिवर्तन दिखाई नहीं देता। इसका कारण यह है कि कुछ जिला में चावल की उपज सामान्य से कम है तो कुछ दूसरे जिलों में इसकी उपज

सामान्य से अधिक हो सकती है। इससे सिद्ध होता है कि जब परीक्षण क्षेत्र विस्तृत हो तो कुछ परिवर्तना में एक दशा में और कुछ की दूसरी दशा में होने की अधिक सम्भावना होती है और कुल मिला कर परिवर्तन न के बराबर होते हैं। इस तथ्य (Phenomenon) का महाक स्थिरता नियम कहते हैं। यह नियम बताता है कि अधिक सत्यापन कम सत्यापन की तुलना में अधिक स्थिर होती है।

### अभ्यास के लिए प्रश्न

- 1 अक्षांश व सगह करन की सगणना विधि और निदशन विधि के लाभ-हानि का तुलना कीजिए।
- 2 सगणना विधि की तुलना में निदशन विधि के लाभ बताइए।
- 3 निदशन की विभिन्न रीतियों की उदाहरण सहित विवचना कीजिए।
- 4 निदशन अनुसंधान विधि का समझाइए तथा इसकी उपयोगिता बताइए।
- 5 स्तरित निदशन, व्यवस्थित निदशन तथा बहुस्तरीय निदशन पर टिप्पणियाँ लिखिए।
- 6 "एक अच्छा यादग दब निदशन पर आधारित होना चाहिए। विवचना कीजिए।
- 7 सम्भावित निदशन (Chance Sampling)- और सविचार निदशन (Purposing Sampling) में अंतर स्पष्ट कीजिए।
- 8 अदब-निदशन (Non-random Sampling) विधि पर टिप्पणी लिखिए।
- 9 दब निदशन (Random Sampling) रीति का विवेचन कीजिए।
- 10 (क) निम्नलिखित की व्याख्या कीजिए
  - (1) साख्यकीय नियमितता नियम
  - (2) महाक स्थिरता नियम
- (ख) साख्यकीय रीतियाँ का कौन सा भाग इन दो नियमों पर आधारित है ?

## अध्याय 4

# आंकड़ों का ढगवस्थितीकरण

## (ORGANISATION OF DATA)

आकडा का सकलन तथा सम्पादन करा के पश्चात उनका वर्गीकरण करना पडता है । आकड अपन आप कुछ नहीं बताते । वह तो सख्यात्मक तथ्या का बडा सा समह हाना है । जब तक उनका उचित रूप मे वर्गीकरण न किया जाए उनसे हम किसी ढनष्कप पर नहीं पहुँच सकत । अत सकलित आकडा के व्यवहार का पता लगान के लिए उनका वर्गीकरण किया जाता ह ।

### वर्गीकरण की परिभाषा (Definition of Classification)

वर्गीकरण स अभिप्राय वह प्रक्रम है जिसके अ तगत सकलित आकडा को उनकी विभिन्न विशेषताआ क अनुसार वर्गों मे विभाजित किया जाता है । इन आकडो म से जनावश्यक आकडा को छोड दिया जाता है ।

### वर्गीकरण के उद्देश्य (Objects of Classification)

सकलित आकडो का वर्गीकरण निम्नलिखित उद्देश्यो के लिए किया जाता ह

- (क) आकडा को सरल और सक्षिप्त बनाना ।
- (ख) आकडो की समानता व असमानता का स्पष्ट करना ।
- (ग) आकडा को तुलना के योग्य बनाना ।
- (घ) सारणीयन (Tabulation) तथा अय प्रकार के विश्लेषण के लिए आधार प्रस्तुत करना ।

### वर्गीकरण के आधार (Basis of Classification)

आकडा के वर्गीकरण के मुख्यत चार आधार हैं

- (1) भौगोलिक (Geographical or Spatial)
- (2) कालिक (Chronological or Temporal)
- (3) गुणात्मक (Qualitative)
- (4) मात्रात्मक (Quantitative)

#### (क) भौगोलिक (Geographical) वर्गीकरण

इसके अ तगत सकलित आकडा का वर्गीकरण क्षेत्रवार किया जाता है । उदाहरण के लिए खाद्या ना की उपज की मात्रा भारत मे राज्यानुसार इस प्रकार प्रस्तुत की जा सकती है

1976-77 में खाद्या नों की उपज को मात्रा  
(राश्यानुसार)

राज्य	उपज (करोड़ टन)
बिहार	0 90
हरियाणा	0 52
महाराष्ट्र	0 96
पंजाब	0 92
उत्तर प्रदेश	1 94
अन्य राज्य	5 86
कुल	11 10

(घ) कालिक या समयानुसार (Chronological) वर्गीकरण

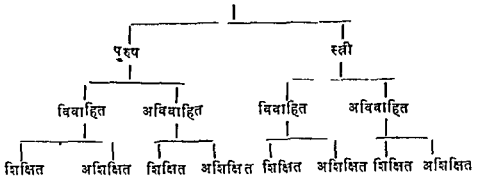
जब वर्गीकरण का आधार समय का अंतर होना है तब वर्गीकरण समयानुसार या कालिक कहलाता है। उदाहरण के लिए भारत की जनसंख्या के आंकड़े समयानुसार इस प्रकार दिये जा सकते हैं

भारत की जनसंख्या (1901-71)

गणना वर्ष	भारत की जनसंख्या (करोड़ों में)
1901	23 8
1911	25 2
1921	25 1
1931	27 9
1941	31 9
1951	36 1
1961	43 9
1971	54 8

(ग) गुणात्मक (Qualitative) वर्गीकरण

गुणात्मक वर्गीकरण में आंकड़ा के गुणा के भेद को लेकर वर्गीकरण किया जाता है जैसे किसी देश की जनसंख्या का लिंग, आयु, व्यवसाय, विवाहित स्थिति, धर्म आदि के आधार पर किया जाये। उदाहरणार्थ, जनसंख्या का बहुगुण वर्णन का एक उदाहरण नीचे दिया गया है



**(घ) मात्रात्मक (Quantitative) वर्गीकरण**

आँकड़ों का मात्रात्मक वर्गीकरण छोटी और बड़ी सङ्ख्या के आधार पर किया जाता है, जैसे—एक कक्षा के विद्यार्थियों को उनके द्वारा प्राप्त अंकों के अनुसार वर्गों में विभाजित करना।

**वर्गीकरण के भेद (Kinds of Classification)**

वर्गीकरण के दो प्रकार हो सकते हैं

(क) सरल वर्गीकरण (Simple Classification)

(ख) बहुविध वर्गीकरण (Manifold Classification)

**(क) सरल वर्गीकरण (Simple Classification)**

सरल वर्गीकरण में आँकड़ा या मद्दा का एक विशेषता या गुण के अनुसार वर्गीकरण किया जाता है। इसमें प्रत्येक वर्ग को दो उपवर्गों में बाँट दिया जाता है। उदाहरण के लिए एक राज्य के व्यक्तियों का उनकी शिक्षा शिक्षित या अशिक्षित के अनुसार वर्गीकरण।

**(ख) बहुविध वर्गीकरण (Manifold Classification)**

इसमें मद्दों का एक से अधिक विशेषता के अनुसार विभाजित किया जाता है। उनका कई वर्ग व उपवर्ग बनाए जा सकते हैं। उदाहरण के लिए हम एक राज्य के व्यक्तियों का पहले उनके लिंग के अनुसार पुरुषों स्त्रियों में वर्गीकरण कर लेते हैं, फिर प्रत्येक वर्ग को उनकी शिक्षा के आधार पर शिक्षित एवं अशिक्षित उपवर्गों में विभाजित कर सकते हैं। तत्पश्चात् उनके अर्थ गुणा, जैसे विवाहित और अविवाहित, उपवर्गों में बाँट दिया जा सकता है और इसी प्रकार उपवर्गीकरण क्रम उनके किसी अन्य गुण के आधार पर आगे भी चलाया जा सकता है।

**चर और वर्ग-आवृत्ति (Variable and Class Frequency)**

सांख्यिक वर्गीकरण में दो तत्व—चर (Variable) और वर्ग-आवृत्ति (Class frequency) होते हैं। आयु, आय, ऊँचाई, बुद्धि, रंग आदि चर हैं। इनमें



कुछ को आकड़ों में मापा जा सकता है और कुछ को नहीं। आयु ऊँचाई तापमान आदि चरों को प्रत्यक्ष या अकार में मापा जा सकता है जब कि रंग, बुद्धि, कुशलता आदि को अकार में या प्रत्यक्ष में नहीं मापा जा सकता। चर खण्डित (Discrete) या अखण्डित (Continuous) हो सकते हैं। अखण्डित को गणितीय शुद्धता से मापा जा सकता है परन्तु खण्डित चर को इतनी शुद्धता से मापा नहीं जा सकता।

आवृत्ति का अर्थ तथा आवृत्ति वितरण की रचना (Meaning of Frequency and Construction of Frequency Distribution)

आवृत्ति का अर्थ (Meaning of Frequency)

अपने मूल रूप में आकड़े अवर्गीय होते हैं और यह मस्तिष्क में उलझन पैदा कर देते हैं। अतः सर्वप्रथम हम आकड़ों को आरोही (Ascending) या अवरोही (Descending) क्रम में लिख देते हैं। क्रम में रखने की यह विधि क्रमबद्ध (Array) कहलाती है। काय की ओर अधिक सुविधा के लिए इनका सारणी में रखा जाता है।

उदाहरण—

सारणी 1  
(Table-I)

40 विद्यार्थियों द्वारा 100 अंकों में से प्राप्त अंक निम्नलिखित हैं। आरोही और अवरोही दो क्रमबद्ध बनाइए।

30	20	10	50	60	40	80	30	0	30
90	50	40	80	0	10	60	90	50	20
0	90	30	40	70	80	60	40	70	30
40	20	30	30	20	10	20	40	50	70

आरोही और अवरोही दो क्रमबद्ध (Ascending and Descending two arrays)

अंक	0	20	30	50	70
	0	20	30	50	70
	0	20	40	50	80
	10	30	40	50	80
	10	30	40	50	80
	10	30	40	60	90
	20	30	40	60	90
	20	30	40	70	90

### अवरोही क्रमबद्ध (Descending Order Array)

90	70	40	30	20
90	60	40	30	20
90	60	40	30	10
80	60	40	30	10
80	50	40	30	10
80	50	40	20	0
70	50	30	20	0
70	50	30	20	0

मदो या आकड़ा का वर्गों में विभाजित करने के पश्चात यह जान लेना भी आवश्यक होता है कि एक वर्ग विशेष में कितने मद (Items) या अवलोकन (Observations) आते हैं। इन मदों या अवलोकनों को सख्या उस वर्ग की आवृत्ति (Frequency) कहलाती है। मान लीजिए कि एक वर्ग में 10 व्यक्ति ऐसे हैं जिनका वजन 50-60 पाउंड के बीच है। इस सख्या अर्थात् 10 को 50-60 वर्ग की आवृत्ति (Frequency) कहते हैं।

### आवृत्ति वितरण बनाना (Construction of Frequency Distribution)

#### खण्डित आवृत्ति वितरण (Discrete Frequency Distribution)

खण्डित आवृत्ति वितरण को बनाना अत्यंत सरल होता है। इसमें केवल मदों की पुनरावृत्ति को सख्या गिनते हैं। इन सख्याओं को ही उस मद की आवृत्ति कहा जाता है। एक मद की आवृत्ति को सख्या को गिनने के लिए हम मिलान रेखाओं (Tally bars) का प्रयोग करते हैं। प्रत्येक वर्ग या मद के अंत वाली एक इकाई या मद के लिए उस वर्ग के सामने एक लम्बी रेखा (/) लगा दी जाती है। पाँचवीं रेखा पहली चार रेखाओं को काटती हुई लगाई जाती है। इस प्रकार पाँच-पाँच मदों के साँचे (Blocks) बन जाते हैं जिनको गिनना बहुत आसान हो जाता है। अंत में ऐसी रेखाओं को गिन कर मद या वर्ग के सामने लिख दिया जाता है। यह सख्या उन वर्ग या मद की आवृत्ति (Frequency) है। अब हम खण्डित आवृत्ति की रचना को एक उदाहरण से स्पष्ट करते हैं।

ऊपर दिए गए अवरोही क्रमबद्ध (Ascending Order Array) के उदाहरण से खण्डित आवृत्ति वितरण (Discrete Frequency Distribution) की रचना को यहाँ दिखाया गया है।

खण्डित आवृत्ति वितरण  
(Discrete Frequency Distribution)

प्राप्त अंक (चर)	मिलान रेखाएँ (Tally bars)	विद्यार्थियों की संख्या (आवृत्ति)
0		
10		3
20		3
30		5
40		7
50		6
60		4
70		3
80		3
90		3
कुल =		40

हम एक और उदाहरण लेते हैं। 30 विद्यार्थियों द्वारा 20 अंकों में स निम्न-  
लिखित अंक प्राप्त किये गए हैं

2	8	12	10	4	8
12	12	6	12	6	9
10	9	12	10	6	9
7	6	12	8	9	6
8	4	10	7	9	12

ऊपर दिये गये आंकड़ों अपने मूल रूप (raw form) में हैं। अतः अनुसंधानकर्ता का सबसे प्रथम इन्हें आरोही या अवरोही क्रमबद्ध में लाना होता है। जब आंकड़ों को आरोही या अवरोही क्रमबद्ध में लाया जाता है तो इन्हें क्रमबद्ध आंकड़ों (array data) कहा जाता है। हम इन आंकड़ों को आरोही रीति में क्रमबद्ध करते हैं जमा कि नीचे किया गया है।

2	6	8	9	10	12
4	6	8	9	10	12
4	6	8	9	10	12
6	7	8	9	10	12
6	7	9	10	12	12

इन आरोही क्रमबद्ध आकड़ा से खण्डित आवृत्ति वितरण की रचना इस प्रकार होगी

**खण्डित आवृत्ति व वितरण**  
(Discrete Frequency Distribution)

प्राप्त अंक (घर)	मिनात रेखाएँ (Tally Bars)	विद्यार्थियों की संख्या (आवृत्ति)
2		1
4		2
6		5
7		2
8		4
9		5
10		4
12		7
	कुल	<hr style="width: 50%; margin: auto;"/> 30

**खण्डित आवृत्ति की रचना (Construction of a Continuous Frequency Distribution)**

इस प्रकार की आवृत्ति की रचना से पहले हमें वग, वर्ग सीमाएँ, वग विस्तार, मध्य मूल्य या मध्य उदाहरण के लिए 10 20 वर्ग में मध्य मूल्य 15 होगा जस मध्य मूल्य

$$= \frac{10+20}{2} = 15$$

बिन्दु और वग आवृत्ति (Class frequency) को समझ लेना आवश्यक है। अब हम बारी-बारी से इन शब्दों की व्याख्या करते हैं।

**1 वग (Class)**

एक निश्चित विस्तार के समूह (Stated group of magnitude) को वग

बहा जाता है जैसे 10—20 अंक, 20—25 रुपये, 5—10 मीटर इत्यादि।

## 2 षग सीमाएँ (Class Limits)

एक षग म दो सीमाएँ होती हैं—निम्न सीमा (lower limit) और ऊपरी सीमा (upper limit)। उदाहरण के लिए 35-40 के षग म 35 निम्न सीमा है और 40 ऊपरी सीमा है। कभी-कभी निम्न और ऊपरी सीमाएँ खुली छाड दो जाती है। इनको दिवत मुखी षग (Open end classes) कहा जाता है जैसे 100 रु० स कम आय, 1000 रु० से अधिक आय।

## 3 षग विस्तार या षगांतर (Class Interval)

एक षग की ऊपरी तथा निम्न सीमाओं के अंतर को षगे विस्तार या षगांतर कहा जाता है। उदाहरण के लिए 35-40 के षग का षग विस्तार 5 है।

## 4 मध्य मूल्य या मध्य बिंदु (Mid Value or Mid Point)

एक षग के षग विस्तार का मध्य उस षग का मध्य मूल्य या मध्य बिंदु कहलाता है। मध्य मूल्य का ज्ञात करने के लिए षग की उच्च सीमा और निम्न सीमा का योग कर दिया जाता है और तत्पश्चात उसका आधा कर लिया जाता है।

$$\text{मध्य मूल्य} = \frac{\text{उच्च सीमा} + \text{निम्न सीमा}}{2}$$

## 5 षग-आवृत्ति (Class Frequency)

एक षग म मदों (items) या अवलोकनों (observations) की संख्या को उस षग की आवृत्ति कहते हैं।

### षग सीमा को निर्धारित करना (Determination of Class Limits)

षग सीमा को निर्धारित करने की दो विधियाँ हैं

(क) अपवर्जी विधि (Exclusive Method) और

(ख) समावेशी विधि (Inclusive Method)

#### (क) अपवर्जी विधि (Exclusive Method)

इस विधि के अंतगत एक षग की ऊपरी सीमा दूसरे षग की निम्न सीमा होती है, जैसे—10-20, 20-30, 30-40 अंक आदि। जिस विद्यार्थी के पूरे 20 अंक हैं उसे 20-30 के षग म सम्मिलित किया जायेगा।

#### (ख) समावेशी विधि (Inclusive Method)

इस विधि के अनुसार एक षग की निम्न सीमा और ऊपरी सीमा उसी षग मे सम्मिलित होती है। इसमे स्पष्ट है कि एक षग की ऊपरी सीमा और उससे अगले षग की निम्न सीमा म अंतर होगा जैसे 60-69, 70-79, 80-89, आदि।

अखण्डित आवृत्ति वितरण की रचना का स्पष्टीकरण (Illustration of the construction of continuous frequency distribution)

उदाहरण 1

अपवर्जो विधि  
(Exclusive Method)

40 विद्यार्थियों द्वारा गणित परीक्षा में प्राप्त अंक नीचे दिए गये हैं। 5 के वर्गान्तर का प्रयोग करके अपवर्जो विधि से एक आवृत्ति वितरण बनाइये।

83	80	91	81	88	82	87	97	83	90
75	85	72	92	84	90	87	78	93	88
86	80	93	86	88	83	82	82	89	73
85	95	80	89	84	92	76	81	72	94

हल

सारणी-1

अखण्डित आवृत्ति वितरण (अपवर्जो विधि)

वर्गान्तर (Class interval)	मिलान रेखाएँ (Tally Bars)	आवृत्ति (Frequency)
70-75		3
75-80		3
80-85		13
85-90		11
90-95		8
95-100		2
	कुल	40

## समावेशी विधि

(Inclusive method)

60 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त प्रतिशत अंको का ब्योरा नीचे दिया गया है।  
9 के वर्गान्तर का प्रयोग करके समावेशी विधि द्वारा एक आवृत्ति वितरण बनाइए।

41	17	83	63	54	92	60	58	70	06
67	82	33	44	57	49	34	73	54	63
36	52	32	75	60	33	09	79	28	30
42	93	43	80	03	32	57	67	24	64
63	11	35	82	10	32	0	41	60	32
72	53	92	88	62	55	60	33	40	57

हल

## सारणी 2

अखण्डित आवृत्ति वितरण (समावेशी विधि)

वर्गान्तर (Class interval)	मिसान रेखाएँ (Tally Bars)	आवृत्ति (Frequency)
0-9		4
10-19		3
20-29		3
30-39		10
40-49		7
50-59		9
60-69		11
70-79		5
80-89		5
90-99		3
	योग	60

आवृत्ति वितरण की रचना की प्रमुख समस्याएँ (Problems in constructing Frequency Distribution)

आवृत्ति वितरण की रचना की मुख्य समस्याएँ निम्नलिखित हैं

### (1) वर्गों की संख्या (Number of Classes)

सबसे पहले हम यह निर्णय करना पड़ता है कि क्या की संख्या कितनी हो। यह निर्णय हम अनेक तथ्यों को विचार करने करते हैं। जैसे एक श्रृंखला में मद्दा की संख्या, निम्नतम तथा उच्चतम मूल्य, वर्गों के अन्तगत मद्दा का वितरण, वर्ग आवृत्ति का क्रम इत्यादि। वर्गों की संख्या न तो अति कम हानी चाहिये और न ही अत्यधिक। इसके लिए कोई कठोर नियम तो नहीं, फिर भी साधारणतः ऐसा समझा जाता है कि इसकी संख्या 5 से 15 के बीच हानी चाहिए।

### (2) वर्गों की सीमाएँ (Class Limits)

आवृत्ति वितरण रचना की दूसरी समस्या वर्गों की सीमाओं का निर्धारण करना होता है। वर्गान्तर की सीमाओं को लिखने में अनेक तरीके हैं। कोई भी एक तरीका ठीक हो सकता है यदि उसमें कोई अस्पष्टता (ambiguity) न हो। वर्गान्तर की सीमाएँ अपवर्ती रीति (Exclusive Method) में या समावेशी रीति (Inclusive Method) से निर्धारित की जाती है।

### (3) विवृतमुखी वर्ग (Open end Classes)

विवृतमुखी वर्ग वह वर्ग है जिसमें या तो निम्नतम वर्ग की निम्न सीमा और या उच्चतम वर्ग की ऊपरी सीमा को छोड़ा होता है। जहाँ तक सम्भव हो विवृत मुखी वर्गों को नहीं लिखना चाहिए, क्योंकि इनमें कई प्रकार की कठिनाइयाँ पैदा हो जाती हैं, जैसे, हम एक विवृतमुखी वर्ग का मध्य-मूल्य नहीं जान सकते।

### (4) असमान वर्गान्तर (Unequal Class Interval)

असमान वर्गान्तर वाले वर्गों में यह कठिनाई अर्थात् है कि सभी वर्गों की तुलना उनकी आवृत्ति से नहीं की जा सकती क्योंकि इनमें एक समान (Uniform) अन्तर नहीं होता। इस कठिनाई का दूर करने के लिए हम अनुमान लगाते हैं कि यदि एक समान अन्तर का प्रयोग किया जाता तो प्रत्येक वर्ग में आवृत्ति प्रो क्या होती।

### संचयी आवृत्ति वितरण (Cumulative Frequency Distribution)

संचयी आवृत्ति वितरण वह वितरण है जिसमें आवृत्तियाँ संचय रूप से व्यक्त की गई हैं। एक संचयी आवृत्ति वितरण में एक विशेष वर्ग की आवृत्ति उस वर्ग की आवृत्ति में पिछले वर्गों की समस्त आवृत्तियों का जाड़कर प्राप्त की जाती है। स्पष्टतया अन्तिम वर्ग की संचयी आवृत्ति सब वर्गों की आवृत्तियों का योगफल होता है। संचयी आवृत्ति वितरण को दो रूपों में व्यक्त किया जा सकता है—“से कम” (Less than) के रूप में और “से अधिक” (More than) के रूप में।



## उदाहरण 3

निम्नलिखित आवृत्ति वितरण से "से कम" (Less than) और "से अधिक" (More than) रूप की सचयी आवृत्ति शृंखलाओं की रचना कीजिए

वर्गान्तर	विद्यार्थियों की संख्या (आवृत्ति)
50-54	4
54-58	6
58-62	12
62-66	8
66-70	6
70-74	12
	योग
	48

हृप

"से कम" ('Less than Type)

वर्गान्तर (प्राप्त अंक)	विद्यार्थियों की संख्या आवृत्ति
50 से कम	0
54 से कम	4
58 से कम	10
62 से कम	22
66 से कम	30
70 से कम	36
74 से कम	48

"से अधिक" ('More than Type)

वर्गान्तर (प्राप्त अंक)	विद्यार्थियों की संख्या आवृत्ति
74 से अधिक	0
70 से अधिक	12
66 से अधिक	18
62 से अधिक	26
58 से अधिक	38
54 से अधिक	44
50 से अधिक	48

## अभ्यास के लिए प्रश्न

### (EXERCISES)

1 आँकों के वर्गीकरण से आप क्या समझते हैं? वर्गीकरण के मुख्य उद्देश्य क्या हैं?

2 वर्गीकरण के उद्देश्यों तथा विभिन्न सारियों की संश्लेष में व्याख्या कीजिए।

3 एक परीक्षा में 25 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक नीचे दिये गए हैं

23, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 36, 41, 43, 44, 45, 48, 49, 52, 53, 54, 56, 56, 58, 61, 62, 65, 68, 68

(क) उपरोक्त आँकों को आवृत्ति वितरण के रूप में 20-29, 30-39, 40-49, 50-59 और 60-69 के वर्गों में लेकर क्रमबद्ध (array) कीजिए।

(ख) इनसे सचय आवृत्ति वितरण की रचना भी कीजिए।

4 निम्न शब्दों की व्याख्या कीजिए

(क) क्रम बद्ध (Array), (ख) वर्गीकरण, (ग) चर,  
(घ) मध्य बिन्दु, (ङ) आवृत्ति,  
(च) वग-सीमाएँ, और (झ) सचय आवृत्ति।

5 निम्नलिखित 25 चर मूल्यों से आवृत्ति सारणी बनाइए

19, 23, 24, 23, 20, 22, 21, 22, 20, 22, 23, 21, 20, 22, 23, 22, 24, 21, 25, 22, 21, 22, 23, 21, 23

6 60 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त प्रतिशत अंकों का ब्यौरा नीचे दिया गया है। 9 के वर्गों तक का प्रयोग करने समावेशी रीति द्वारा एक आवृत्ति वितरण बनाइए।

41	17	83	63	54	92	60	58	70	06
67	82	33	44	57	49	34	73	54	63
36	52	32	75	60	33	09	79	28	30
42	93	43	80	03	32	57	67	24	64
63	11	35	82	10	32	0	41	60	32
72	53	92	88	62	55	60	33	40	57

7 निम्नलिखित आंकड़ा से अखण्डित आवृत्ति वितरण की रचना कीजिए तथा "से कम" और "से अधिक" की सचय शृंखलाएँ (Series) बनाइए

आय ₹० म

व्यक्तियों की संख्या

(मध्य मूल्य)

(आवृत्ति)

50

7

150

15

250

35

350

28

450

10

550

5

8 50 विद्यार्थियों द्वारा साहित्यकी में प्राप्त नोचे दिये गए अंका से पहला बग विस्तार 0 10 लेते हुए आवृत्ति सारणी की रचना कीजिए ।

70	55	51	57	42	45	60	40	63	53
33	65	39	55	82	64	58	61	65	42
50	52	53	45	45	24	36	59	63	39
65	45	49	64	54	75	42	41	52	33
30	35	15	26	48	20	40	55	46	18

9 खण्डित और अखण्डित चरा की उदाहरणों सहित व्याख्या कीजिए ।

10 (क) आव आवृत्ति सारणी में क्या समझते हैं ?

(ख) 25 विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्त अंका को 5 6, 7 8 ----- इत्यादि बर्गों में लेते हुए आवृत्ति सारणी में प्रस्तुत कीजिए ।

-----

# खण्ड 3 (UNIT III)

## आंकड़ों का प्रस्तुतीकरण

### (PRESENTATION OF DATA)

अध्याय 5

## सारणीयन प्रदर्शन

(TABULAR PRESENTATION)

सारणी व सारणीयन (Table and Tabulation)

आंकड़ों के वर्गीकरण के पश्चात उनको सारणियों (Tables) द्वारा प्रदर्शन करने के क्रम का सारणीयन (Tabulation) कहते हैं। यह एक वैज्ञानिक प्रक्रम है जिसके अन्तगत आंकड़ा के वर्गीकरण के पश्चात उनको पंक्तियों (Rows) और स्तम्भों (Columns) में सारणी के रूप में रखा जाता है। पंक्तियाँ सम्पुर्ण (Horizontal) और स्तम्भ लम्बवत् (Vertical) होते हैं। सारणीयन का प्रमुख उद्देश्य जटिल आंकड़ा का सरल बनाना होता है।

सारणीयन के उद्देश्य (Objectives of Tabulation)

सारणियों के बनाने के मुख्य उद्देश्य निम्नलिखित हैं

(क) ये जटिल आंकड़ों को सरल बनाती हैं और उन्हें तुलना के योग्य बनाती हैं।

(ख) ये आंकड़ा का सारणीबद्ध करके सांख्यिकी विश्लेषण के उपयुक्त बनाती हैं।

(ग) ये आंकड़ा के प्रस्तुतीकरण (Presentation) में सहायता देती हैं।

(घ) ये स्थान की बचत करती हैं क्योंकि लम्बी चौड़ी सूचनाओं को सक्षिप्त रूप से थोड़े से स्थान में देती हैं।

(ङ) सारणीबद्ध आंकड़ों को देखने से तुरन्त पता चल जाता है कि दो या दो से अधिक पंक्तियों में कोई सम्बन्ध है अथवा नहीं।

(च) सारणीबद्ध आंकड़ों में त्रुटि के जोड़ के कार्य को आसान कर देते हैं तथा त्रुटियों (errors) और भूलों का तुरन्त पता चल जाता है।

### सारणियों के प्रकार (Types of Tables)

सारणियों के कई प्रकार होते हैं। मुख्य रूप से उन्हें दो भागों में बाँटा जा सकता है

(क) सरल सारणी (Simple Table) तथा जटिल सारणी (Complex Table)

(ख) सामान्य उद्देश्य सारणी (General Purpose Table) तथा विशिष्ट उद्देश्य सारणी (Special Purpose Table)

(क) सरल तथा जटिल सारणियाँ (Simple and Complex Tables)

एक सरल सारणी में केवल एक विशेषता या गुण को व्यक्त किया जाता है, जैसे जनसंख्या का विभिन्न आयु श्रेणियों के अनुसार सारणीयन जब कि एक जटिल सारणी में एक में अधिक गुणों या विशेषताओं का प्रस्तुत किया जाता है जैसे जनसंख्या का विभिन्न आयु श्रेणियों के अनुसार वितरण और फिर प्रत्येक आयु वर्ग में पुरुषों तथा स्त्रियों की संख्या का व्यक्त करना।

(ख) सामान्य उद्देश्य तथा विशिष्ट उद्देश्य वाली सारणियाँ (General Purpose and Special Purpose Tables)

एक सामान्य उद्देश्य वाली सारणी को सन्दर्भ सारणी (Reference Table) भी कहा जाता है। इसको बनाने का कोई विशेष तरीका नहीं होता अर्थात् यह किसी विशेष उद्देश्य के लिए नहीं बनाई जाती। इसमें विस्तृत सांख्यिकीय सूचना का विवरण होता है। सरकार द्वारा बनाई गई जनगणना सम्बन्धी सारणियाँ प्रायः इसी प्रकार की होती हैं।

विशेष उद्देश्य वाली सारणी किसी विशेष उद्देश्य को लेकर बनाई जाती है। ऐसी सारणियों को सारांश सारणियाँ (Summary Tables) अथवा विश्लेषण सम्बन्ध सारणियाँ (Analytical Tables) भी कहा जाता है। ये सारणियाँ सक्षिप्त और सरल होती हैं।

सारणी निर्माण के माग बशत (Guidelines for Construction of a Table or Requirements of a Good Table)

सारणी बनाने के लिए कोई निश्चित नियम तो नहीं फिर भी एक आदर्श सारणी बनाने के लिए निम्नलिखित मुख्य बातों का ध्यान में रखना चाहिए

(1) प्रत्येक सारणी पर क्रम सहायता देनी चाहिए और उसका शीर्षक सक्षिप्त और स्पष्ट होना चाहिए।

(2) मदों (Items) को व्यवस्थित पंक्तियों में उनके बणमात्तानुसार (Alphabetically) समानानुसार, भौगोलिक क्षेत्रों के आधार आदि पर करना चाहिए।

(3) माप की इकाई स्पष्ट रूप से बताई जानी चाहिए। उसकी अस्पष्टता के कारण विरलेपण दोषपूर्ण हो जाते हैं।

(4) सारणी बहुत लम्बी चौड़ी नहीं होनी चाहिए । यदि साक्ष्यकी सामग्री बहुत अधिक है तो उसको एक की बजाए दो सारणियाँ बना लेनी चाहिए ।

(5) आकड़ा को उपसादित (Round of) करके लिखना चाहिए ।

(6) सारणा में दिए आँकड़ों में से यदि कुछ आँकड़े अधिक महत्व रखते हैं तो उनकी माटे अक्षरों में लिख देना चाहिए । इससे उनका महत्व स्पष्ट हो जाता है ।

(7) पंक्तियाँ (Rows) और स्तम्भ (Columns) में रखे गए आकड़ा व याग व अक्षरयोग स्पष्ट रूप से लिखना चाहिए ।

(8) सारणी बनाते समय सफाई का भी ध्यान रखना चाहिए । उसमें आकड़ा की अधिक काट-छाट करके उसे भद्दा नहीं करना चाहिए ।

(9) सारणी में दिए गए आँकड़ा में यदि अस्पष्टता हो और उनसे सम्बन्ध किसी विशेष बात को बताना है तो उसे टिप्पणियाँ (Foot notes) में लिखना चाहिए ।

(10) सारणी के अंत में सारणी में लिखे गए आकड़ों का स्रोत भी लिखना चाहिए ।

## एक आदर्श सारणी के आवश्यक लक्षण

### (Characteristics of a Good Table)

एक उत्तम सारणी में निम्नलिखित विशेषताएँ (लक्षण) होने चाहिए ।

(1) सारणी साक्ष्यकीय अनुसंधान के उद्देश्य के अनुकूल होनी चाहिए ।

(2) सारणी सुनियोजित तथा वैज्ञानिक ढंग से निर्मित की जानी चाहिए ।

(3) सारणी आकर्षक एवं सजुलित होनी चाहिए ।

(4) सारणी में अनावश्यक वर्गीकरण नहीं किया जाना चाहिए तथा वह अधिक विवरणों से भरी हुई नहीं होनी चाहिए ।

(5) सारणी ऐसी होनी चाहिए कि सभी आवश्यक मदों के तथ्यों को स्पष्ट करे तथा स्वयं में पूर्ण एवं शुद्ध हो ।

(6) सारणी का आकार और खानों व पंक्तियों का अनुपात निश्चिन करते समय उद्देश्य एवं बोधगम्यता का विशेष ध्यान रखना चाहिए ।

(7) सारणी में तथ्यों का क्रम इस प्रकार का होना चाहिए कि तुलनात्मक सुविधा रहे ।

(8) सारणी में मापों की इकाइयाँ स्पष्ट रूप से दिखाई जानी चाहिए जैसे— 'कीमत रुपये में' 'भार किलोग्राम' आदि ।

(9) सारणी स्वयं परिचायक (Self explanatory) होनी चाहिए, अर्थात्

सारणी में उचित शीर्षक उपशीर्षक, खाना व पंक्तियाँ के शीर्षक, मदों के पाग, टिप्पणी आदि स्पष्ट हानी चाहिए ।

सारणी के प्रमुख भाग (Main parts of a Table)

एक सारणी के प्रमुख भाग निम्नलिखित हैं

(1) सारणी संख्या (Table Number)

सारणी संख्या लिखने का उद्देश्य यह होता है कि सारणी को ढूँढने में समय न लगे । सारणी संख्या का देखकर हम उसे पुस्तक या प्रतिवेदन में बड़ी आसानी से ढूँढ सकते हैं ।

(2) सारणी का शीर्षक (Title of the Table)

प्रत्येक सारणी का एक शीर्षक होना चाहिए जो छोटा और स्पष्ट हो । शीर्षक व शब्द ऐसे हाने चाहिए जो स्पष्ट रूप से आँकड़ा के स्वरूप, समय तथा स्थान सम्बन्ध को बता सकें ।

(3) मुख्य संकेत (Head-notes)

शीर्षक का और अधिक स्पष्ट करने के लिए इसके तुरंत नीचे मुख्य संकेत भी दिया जा सकता है ।

(4) उपशीर्षक (Captions) और पंक्ति शीर्षक (Stubs)

सारणी में स्तम्भों (Columns) के शीर्षक को उपशीर्षक (Captions) कहा जाता है । सारणी में पंक्ति के शीर्षक का पंक्ति शीर्षक (Stubs) कहते हैं । यह सारणी के एकदम बाएँ ओर होते हैं । सबसे ऊपर एक मुख्य पंक्ति शीर्षक (Stub Head) भी होता है ।

(5) कलेवर (Body)—यह सारणी का मुख्य भाग होता है क्योंकि इसमें समस्त माँखियकीय सूचना दी हुई होती है । आँकड़ा को स्तम्भों और पंक्तियों से प्रस्तुत किया जाता है और योग भी नीचे दिए होते हैं । वास्तव में कलेवर सारणी का एक बहुत ही महत्वपूर्ण भाग होता है ।

(6) टिप्पणियाँ (Foot notes)—टिप्पणियाँ सारणी के नीचे बाईं ओर लिखी जाती हैं । यह सारणी का आवश्यक भाग नहीं होता । सारणी में दिये गए अंक और शब्दों में यदि कोई अस्पष्टता रह गई हो उसे टिप्पणी में लिख दिया जाता है । परंतु जहाँ तक सम्भव हो टिप्पणी का प्रयोग कम करना चाहिए । वह तभी हो सकता है यदि सारणी अपने में बिल्कुल पूर्ण हो ।

(7) स्रोत संकेत (Source Note)—स्रोत संकेत सारणी में रखे गए आँकड़ों के स्रोत को बताता है । अतः स्रोत संकेत (Source Note) भी सारणी का एक आवश्यक भाग है ।

सारणी सहाय (Table No )

शीर्षक (Title)

हेड नोट (Head Note)

मुख्य पंक्ति शीर्षक (Stub Head)	उपशीर्षक (Captions)					
	स्तम्भ शीर्षक (Column Heads)					
पंक्तियाँ (Stub entries)			बलेबर (Body)			कलेबर (Body)

1 टिप्पणियाँ (Foot Notes)      2 स्रोत सकेत (Source Note)

उदाहरण—भारत की प्रथम चार योजनाओं में सावजनिक क्षेत्र के परिव्यय व आँकड़ों की सहायता से हम सारणी (Table) के विभिन्न भागों को स्पष्ट करते हैं

सारणी—5

Table No

प्रथम चार योजनाओं में सावजनिक क्षेत्र

(Title)

का परिव्यय

(राज्यों के भाग का सम्मिलित करके)

Head Note  
(करोड़ रुपये में)

Stub head	प्रथम	द्वितीय	तृतीय	चतुर्थ	Box head
	मदें योजना कुल	योजना कुल	योजना कुल	योजना कुल	
	(1)	(2)	(3)	(4)*	
1 कृषि और कृषि सम्बन्धी क्षेत्र	290 (14 8)	549 (11 7)	1089 (12 7)	2353 5 (15 0)	
2 सिव्हाई एच बाढ नियंत्रण	434 (22 2)	430 (9 2)	665 (7 8)	1272 0 (8 1)	



सारणी में उचित शीर्षक उपशीर्षक, खाना व पंक्तियों के टिप्पणी आदि स्पष्ट हानी चाहिये ।

सारणी के प्रमुख भाग (Main parts of a Table)

एक सारणी के प्रमुख भाग निम्नलिखित हैं

(1) सारणी सख्या (Table Number)

सारणी सख्या लिखने का उद्देश्य यह होता है समय न लगे । सारणी सख्या को देखकर हम उसे पुस्तक भाषासानी में ढूँढ सकत हैं ।

(2) सारणी का शीर्षक (Title of the Table)

प्रत्येक सारणी का एक शीर्षक होना चाहिए जो शीर्षक व शब्द ऐसे हों चाहिए जो स्पष्ट रूप से अ स्थान सम्बन्ध को बता सके ।

(3) मुख्य सकेत (Head-notes)

शीर्षक का और अधिक स्पष्ट करने के लिए भी दिया जा सकता है ।

(4) उपशीर्षक (Captions) और पंक्ति

सारणी में स्तम्भ (Columns) व शीर्षक जना है । सारणी में पंक्ति के शीर्षको को पंक्ति सारणी के एकदम बाएँ और हाते है । सबसे ऊपर Head) भी होता है ।

(5) कसेवर (Body)—यह सारणी का

समस्त सांख्यिकीय सूचना दी हुई होती है । आँक प्रस्तुत किया जाता है और योग भी नीचे दिए होते का एक बहुत ही महत्वपूर्ण भाग होता है ।

(6) टिप्पणियाँ (Foot notes)—टिप्पणियाँ

लिखी जाती हैं । यह सारणी का आवश्यक भाग नहीं हो। अक और शब्दों से यदि कोई अस्पष्टता रह गई हो, उसे जाता है । पर तु जहाँ तक सम्भव हा टिप्पणी का प्रयोग तभी हो सकता है यदि सारणी अपने में बिल्कुल पूरा हो ।

(7) स्रोत सकेत (Source Note)—स्रोत सकेत

के स्रोत को बताता है । अतः स्रोत सकेत (Source Note) आवश्यक भाग है ।

## ऑकड़ों का चित्रमय प्रदर्शन

### (DIAGRAMMATIC PRESENTATION OF DATA)

सारणिया में प्रस्तुत सांख्यिकीय आकड़ा को केवल सारणिया को पढ़ने वाले विशयज्ञ ही समझ सकते हैं किंतु जब आकड़ों को चित्र द्वारा प्रस्तुत किया जाता है तो साधारण व्यक्ति भी इनमें प्रस्तुत सामग्री का बड़ी आसानी से समझ लेता है। आकड़ों का चित्रमय प्रदर्शन आँखों को आकर्षक लगता है और इसी कारण अंकों की तुलना में अधिक प्रभावशाली होने हैं। चित्रों द्वारा आकड़ा का विस्तृत समूह भी एक ही बार देखने में समझ में आ जाता है। आकड़ा को अनेक प्रकार के चित्रों जैसे सरल दण्ड चित्र, बहुदण्ड चित्र, उप-विभाजित दण्ड चित्र, वृत्तीय चित्र, मान चित्र, चित्र लेख इत्यादि द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है।

आँकड़ों के चित्रमय प्रदर्शन से लाभ (Advantages of diagrammatic presentation of data)

आँकड़ों के चित्रमय प्रदर्शन के निम्नलिखित लाभ हैं

(1) चित्र आकड़ा के विशाल समूह को आकर्षक और समानान्तर में आसानी से समझाने में सहायक होता है।

(2) चित्रों का प्रभाव तुरंत होता है और वह चिरकाल तक रहता है।

(3) चित्रों द्वारा अंकों के बीच तुलना भी आसानी हो जाती है क्योंकि चित्रों को देखने मात्र से तुलना हो जाती है। आँकड़ों को पढ़ने में समझने की भी आवश्यकता नहीं पड़ती।

(4) अंकों में नीरसता होती है जब कि चित्र आँखों को आकर्षक लगते हैं।

(5) एक अनपढ़ व्यक्ति सांख्यिकी तथ्यों के महत्त्व को अंकों की तुलना में चित्रों द्वारा अधिक आसानी से समझ सकता है।

चित्रों की संरचना के भागदर्शन (Guidelines for Construction of Diagrams)

चित्र बनाते समय हमें निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए

(1) प्रत्येक चित्र का एक उपयुक्त शीर्षक होना चाहिए।

(2) चित्र का आकार ठीक अनुपात में होना चाहिए।

(3) चित्र बनाते समय एक उचित माप (Scale) रखना चाहिए। मापदण्ड कागज के अनुपात में होना चाहिए।

	(1)	(2)	(3)	(4)*	
3 शक्ति (Power)	149 (7 6)	452 (9 7)	1252 (14 6)	2911 8 (18 9)	Body
4 ग्राम और लघु उद्योग	42 (2 1)	187 (4 0)	241 (2 8)	247 7 (1 6)	
5 उद्योग एवं खनिज	55 (2 8)	938 (20 1)	1726 (20 1)	2873 6 (18 3)	
6 परिवहन एवं संचार	518 (26 4)	1261 (27 0)	2112 (24 6)	3062 0 (19 5)	
7 अन्य	472 (24 1)	855 (18 3)	1492 (17 4)	3006 2 (19 0)	
	1960	4 672	8,577	15,724	
योग	(100 00)	(100 00)	(100 00)	(100 00)	

टिप्पणियाँ (foot note) कोष्ठक में दिए गए अंक क्षेत्र विशेष में परिव्यय से प्रतिशत को दिखाते हैं।

2 \*आशा किए गए (anticipated)

स्रोत (Source) इण्डिया 1976 सारणी 13 1 पृष्ठ 172

#### अभ्यास के लिए प्रश्न

- 1 सारणीयन किस बहन है। सारणीयन के महत्त्व को सक्षेप में समझाइए।
- 2 सारणी व विभिन्न भाग कौन-कौन से हैं? सारणी बनाते समय किन किन बातों का ध्यान रखना चाहिए?
- 3 एवं आदर्श (उत्तम) सारणी में कौन-कौन से लक्षण होने चाहिए?
- 4 एक आदर्श सारणी के मुख्य भाग कौन कौन से हैं? सक्षेप में समझाइए।
- 5 सारणीयन के मुख्य उद्देश्य क्या हैं?

## ऑकड़ों का चित्रमय प्रदर्शन

### (DIAGRAMMATIC PRESENTATION OF DATA)

सारणियां में प्रस्तुत सांख्यिकीय आंकड़ों को केवल सारणियों को पढ़ने वाले विशेषज्ञ ही समझ सकते हैं किंतु जब आंकड़ों को चित्र द्वारा प्रस्तुत किया जाता है तो साधारण व्यक्ति भी इनमें प्रस्तुत सामग्री का बड़ा आसानी से समझ सकता है। आंकड़ों का चित्रमय प्रदर्शन आँखों का आकर्षक लगता है और इसी कारण अर्थों की तुलना में अधिक प्रभावशाली माने जाते हैं। चित्रों द्वारा आंकड़ों का विस्तृत समूह भी एक ही बार देखने में समझ में आ जाता है। आंकड़ों का अनेक प्रकार के चित्रों जैसे सरल दण्ड चित्र, बहुदण्ड चित्र, उप-विभाजित दण्ड चित्र, वृत्तीय चित्र, मान चित्र, चित्र लेख इत्यादि द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है।

आंकड़ों के चित्रमय प्रदर्शन से लाभ (Advantages of diagrammatic presentation of data)

आंकड़ों के चित्रमय प्रदर्शन के निम्नलिखित लाभ हैं

- (1) चित्र आंकड़ों के विंगल समूह को आकर्षक और समझाने में आसानी बनाते हैं।
- (2) चित्रों का प्रभाव तुरंत होता है और वह चिरकाल तक रहता है।
- (3) चित्रों द्वारा अर्थों के बीच तुलना भी आसानी हो जाती है क्योंकि चित्रों को देखने मात्र से तुलना हो जाती है। आंकड़ों को पढ़ने में समझाने की भी आवश्यकता नहीं पड़ती।
- (4) अर्थों में नीरसता होती है जब कि चित्र आँखों को आकर्षक लगते हैं।
- (5) एक अनपठक व्यक्ति सांख्यिकीय तथ्यों के महत्त्व को अर्थों की तुलना में चित्रों द्वारा अधिक आसानी से समझ सकता है।

चित्रों की संरचना के मार्गदर्शन (Guidelines for Construction of Diagrams)

चित्र बनाते समय हमें निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए

- (1) प्रत्येक चित्र का एक उपयुक्त शीर्षक होना चाहिए।
- (2) चित्र का आकार ठीक अनुपात में होना चाहिए।
- (3) चित्र बनाते समय एक उचित माप (Scale) रखना चाहिए। मापदण्ड कागज के अनुपात में होना चाहिए।

(4) चित्र के नीचे टिप्पणी (Foot note) देना चाहिए ताकि प्रस्तुत आंकड़ा में यदि कोई अस्पष्टता रह गई हो तो वह स्पष्ट हो जाए।

(5) एक चित्र में बनाए दण्ड (Bars) की चौड़ाई और उनके बीच का अंतर अतः एक समान होना चाहिए।

(6) चित्र में प्रयोग की गई विभिन्न प्रकार की रेखाओं व दण्डों को स्पष्ट करने के लिए चित्र के नीचे सवेत (Index) भी देना चाहिए।

(7) चित्र बनाते समय सफाई (Neatness) का भी ध्यान रखना चाहिए। गंदा और भद्दा चित्र समझना कठिन होता है।

### (8) चित्रों के प्रकार (Types of Diagrams)

अनेक प्रकार के चित्रों द्वारा सार्विकीय आंकड़ा का प्रदर्शन किया जा सकता है। महत्वपूर्ण चित्रों के प्रकार नीचे दिये गए हैं

(1) सरल दण्ड चित्र (Simple Bar Diagram)

(2) उप-विभाजित दण्ड चित्र (Sub divided Bar Diagram)

(3) बहु दण्ड चित्र (Multiple Bar Diagram)

(4) वृत्तीय चित्र (Pie Diagram)

(5) मानचित्र (Cartogram)

(6) चित्र लेख (Pictogram)

अब हम बारी बारी से प्रत्येक चित्र की व्याख्या करेंगे तथा उसका प्रदर्शन करेंगे।

#### (1) सरल दण्ड चित्र (Simple Bar Diagram)

सरल दण्ड चित्र को सरल दण्ड चाट भी कहा जाता है। शब्द दण्ड से अभिप्राय एक आयत (rectangle) से होता है जिसकी लम्बाई अथवा ऊँचाई चित्र में प्रस्तुत चर के मूल्य (magnitude) के अनुसार बदलती है। दण्ड की चौड़ाई का ध्यान में नहीं रखा जाता परन्तु एक पूर्ण चित्र में दण्डों की चौड़ाई एक समान होनी चाहिए। एक दण्ड पूरे चर के मूल्य (magnitude) को व्यक्त करता है। ऐसे चित्रों को बनाना बहुत सरल होता है। दण्ड खड़े (vertical) अथवा पट (Horizontal) दोनों रूप में बनाए जा सकते हैं। फिर भी यथा सम्भव दण्ड खड़ी स्थिति में अधिक उपयुक्त होते हैं क्योंकि इससे तुलना में आसानी होती है और चित्र भी देखने में अच्छा लगता है। ये चित्र जनसंख्या, उत्पादन, बिक्री आदि आंकड़ा को प्रदर्शित करने के लिए प्रयोग किये जाते हैं। उदाहरण के लिए भारत में निरंतर बढ़ती हुई जनसंख्या इस प्रकार के चित्र द्वारा दिखाई जा सकती है

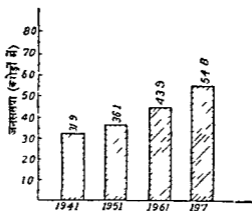
#### उदाहरण 1

निम्न आंकड़ों के आधार पर भारत की जनसंख्या वृद्धि को सरल दण्ड द्वारा प्रदर्शित कीजिए

वर्ष	—	1941	1951	1961	1971
जनसंख्या (करोड़ों में)	—	31.9	36.1	43.9	54.8

हल

उपरोक्त आंकड़ा को हम एक सरल दण्ड चित्र (Simple Bar Diagram) द्वारा निम्न रूप में प्रदर्शित कर सकते हैं।



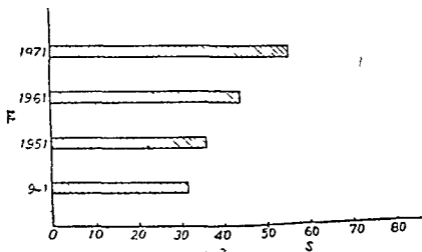
चित्र 1

उपरोक्त चित्र में पट रेखा (Horizontal line) जनगणना वर्षों को दिखाती है और खड़ी रेखा (Vertical line) पर जनसंख्या करोड़ों में दिखाई गई है।

खड़े (Vertical) दण्डों के स्थान पर हम पट (Horizontal) दण्डों वाला चित्र भी बना सकते हैं।

उदाहरण 2

उदाहरण 1 में दिये गये आंकड़ों को हम पट-दण्ड (Horizontal bars) के द्वारा भी चित्र में व्यवस्थित कर सकते हैं। परंतु इस अवस्था में पट-रेखा (Horizontal line) दण्डों का जनसंख्या (करोड़ों में) तथा खड़ी रेखा (Vertical line) जनगणना के वर्षों को प्रदर्शित करती है जैसा कि नीचे चित्र में दिखाया गया है।



जनसंख्या (करोड़ों में)

## 2 उप-विभाजित दण्ड चित्र (Sub divided or Component Bar Diagram)

उपविभाजित दण्ड चित्र का प्रयोग समग्र (The whole) के भागों या अंगों (Component Parts) को प्रदर्शित करने के लिए किया जाता है। इसमें पूर्ण माहिष्प्रकीय सामग्री का एक दण्ड बना लिया जाता है और फिर उसको दिये गए आंकड़ा के अनुसार उपविभाजित कर दिया जाता है। दण्ड के विभिन्न भागों में अन्तर स्पष्ट करने के लिए उनको अलग-अलग रंग या शेडा (shades) द्वारा दिखाया जाता है।

### उदाहरण 3

निम्न सारणी में ग्रामाउद्याग में लगे प्रशिक्षित कमचारियों की सहायता दी गई है

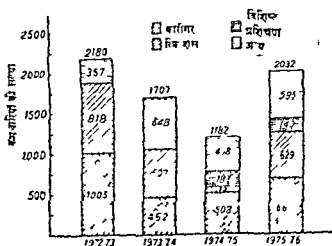
#### ग्रामाउद्याग में लगे प्रशिक्षित कमचारियों की सहायता

वर्ष (Year)	1972-73	1973-74	1974-75	1975-76
कारिगर (Artisans)	1005	452	508	667
रिफ्रेशर (Refreshers)	818	607	53	629
विशिष्ट प्रशिक्षण (Specialised Training)	—	—	182	140
अन्य (Others)	357	648	438	596
कुल	2180	1707	1182	2032

उपरान्त आंकड़ा को उपविभाजित दण्ड चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

हल

उपविभाजित दण्ड चित्र का नीचे दिए चित्र में देखिए -



चित्र 3

### (3) बहुदण्ड चित्र (Multiple Bar Diagram)

दो या दो से अधिक चरों (Magnitudes) को बीच तुलनात्मक पर्यवेक्षण करने के लिए बहुदण्ड चित्रों का प्रयोग किया जाता है। इस चित्र के बनाने की विधि सरल दण्ड चित्र के समान ही है परन्तु इसमें एक दण्ड के स्थान पर दो या अधिक दण्ड बनाये जाते हैं। चरों में अन्तर को स्पष्ट करने के लिए दण्डों में अलग अलग रंग भरा जाता है या शेड (Shade) कर दिया जाता है।

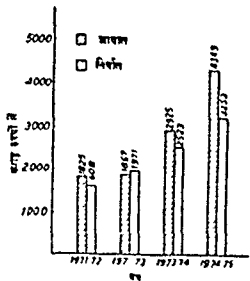
उदाहरण 4

नीचे दिए गए भारत के आयात-निर्गत के आंकड़ों को बहुदण्ड चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

वर्ष	आयात (करोड़ रुपये में)	निर्गत (करोड़ रुपये में)
1971-72	1825	1608
1972-73	1867	1971
1973-74	2925	2523
1974-75	4349	3253

हल

उपरोक्त आंकड़ों को नीचे दी गई बहुदण्ड चित्र द्वारा प्रदर्शित किया गया है



### 4 वृत्तीय चित्र (Pie Diagram) चित्र 4

वृत्तीय चित्र की वृत्तीय खाटें भी बनी जाया है। यह विभिन्न वर्गों में



विभाजित किया हुआ एक वृत्त (Circle) होता है। इस चित्र के द्वारा समग्र (The whole) के विभिन्न खण्डों में तुलना करना आसान हो जाता है।

वृत्तीय चित्र को बनाने की विधि इस प्रकार है। सबसे प्रथम एक वृत्त बनाया जाता है। एक वृत्त में  $360^\circ$  होते हैं। प्रत्येक दिए हुए मद के मूल्य का कुल मूल्य के प्रतिशत में बदल दिया जाता है। समग्र (The whole) का मूल्य 100 प्रतिशत होता है और एक वृत्त में  $360^\circ$  होते हैं। अतः

$$100 \text{ प्रतिशत} = 360^\circ$$

$$1 \text{ प्रतिशत} = \frac{360}{100} \text{ या } 3.6^\circ$$

इसके पश्चात् विभिन्न मदों में प्रतिशतों का कोण (Angles) में बदल दिया जाता है। वृत्त को इन कोणों के आधार पर खण्डों में विभाजित किया जाता है। इन खण्डों को इस क्रम से बनाना चाहिए कि सबसे बड़ा खण्ड चित्र के उपरी भाग में होना चाहिए और अन्य खण्ड बाईं से दाहिनी ओर गिरते क्रम (Clockwise Sequence) से बनाने चाहिए। वृत्तीय चित्र के प्रत्येक खण्ड में अलग-अलग रंग भर दिया जाता है या अलग-अलग प्रकार का शेड (Shade) कर दिया जाता है। प्रायः प्रत्येक खण्ड में मद के मूल्य को भी लिख दिया जाता है।

अब हम एक उदाहरण द्वारा वृत्तीय चित्र की संरचना को प्रदर्शित करते हैं।

#### उदाहरण 5

निम्नलिखित आकड़ा का वृत्तीय चित्र (Pie diagram) द्वारा प्रदर्शित कीजिए

बम्बई में मकान बनाने की लागत

मजदूरी	25%
इंटे	15%
सीमेंट	20%
इस्पात	15%
लकड़ी	10%
निरीक्षण	15%

$$\text{योग} = 100$$

हल •

सबसे प्रथम हम सभी मदों के मूल्यों को कोण (degrees) में बदलते हैं। क्योंकि एक प्रतिशत  $3.6^\circ$  के बराबर है, अतः

मजदूरी	$25 \times 3.6 = 90^\circ$
इंटे	$15 \times 3.6 = 54^\circ$
सीमेंट	$20 \times 3.6 = 72^\circ$
इस्पात	$15 \times 3.6 = 54^\circ$
लकड़ी	$10 \times 3.6 = 36^\circ$
निरीक्षण	$15 \times 3.6 = 54^\circ$

निम्न वृत्ताय चित्र बन्दई में मकान बनाने की लागत के वितरण को प्रदर्शित करता है



चित्र 5

### (5) मान चित्र

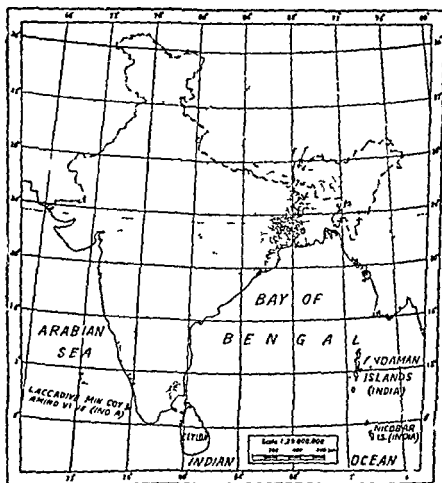
भौगोलिक साक्ष्यकी जानकारी जैसे जनसंख्या का घनत्व, वर्षा, फसलों का वितरण धानज सप्रह आदि का प्रदर्शित करने के लिए मान चित्र का प्रयोग किया जाता है। प्रत्येक क्षेत्र में मरदा की भिन्न भिन्न मात्राओं (Quantities) का अनक प्रकार से जस अलग अलग रंग व शेड द्वारा या अका की मरदा का लिखकर प्रदर्शित किया जा सकता है।

### उदाहरण 6

नाच दिए गए मानचित्र (अगत पृष्ठ पर दिय चित्र 6 वा देखिए) में भारत में चावल की घेती (Rice Cultivation) को प्रदर्शित किया गया है। देग के विभिन्न प्रन्गा में चावल की घेती को अलग-अलग बिन्दुओं द्वारा दिखाया गया है। जिन प्रन्गा में चावल की घेती अधिक होती है वही बिन्दु अधिक घाम-घाम है।

### (6) चित्र लेख (Pictogram)

अन्य प्रकार के चित्रों का तुलना में चित्र लेख (Pictogram) अधिक आकर्षक होते हैं। इसीलिए साक्ष्यकीय जानकारी को प्रस्तुत करने की यह विधि अधिक लोकप्रिय बन गई है। किसी भी मद (Item) को जितनी बिन्दुओं के द्वारा दर्शाया जाता है, वही घेती में मरदा का घनत्व को दर्शाता है, वही घेती में मरदा पर घलन वाली घेती की मरदा आदि के बढ़ने या घटने का घनत्व के चित्र बनाकर दिखाया जाता है। मान लीजिए कि हमने दिल्ली में बढ़ती हुई घेती की मरदा का दिखाया है तो हमें घेती के चित्र बनाकर दिखायेंगे। एक घेती की आकृति का घेती बनाकर बराबर मान दिया जाता है। फिर जस जस प्रति घेती घेती की संख्या घेती जाती है, घेती आकृति की घेती का भी बढ़ाया जाता है। परन्तु चित्रलेख घेती घेती घेती की



चित्र 6—भारत में चावल की खेती

प्रदर्शित नहीं कर सकते क्योंकि यदि मनुष्य की एक आकृति 5,00,000 मनुष्यों को दिखाती है तो 8,76,740 मनुष्यों को चित्र लेख द्वारा दिखाना सम्भव नहीं। ऐसी स्थिति में उपसादन (Approximation) का सहारा लेना पड़ता है।

#### उदाहरण 7

निम्न आंकड़ों को चित्र लेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए—

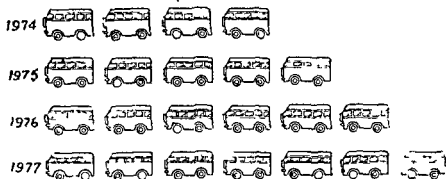
वित्तों में बसों की संख्या

वर्ष	बसों की संख्या
1974	2 000
1975	2,500
1976	3 000
1977	3,500

हल

उपरोक्त आकड़ों को चित्र लेख (Pictogram) द्वारा चित्र 7 में प्रस्तुत किया गया है।

बसों की संख्या  
(1974-77 के मध्य)



1 बस = 500 बसे संज्ञक—परिकल्पित

चित्र 7

चित्रमय प्रदर्शन की सीमाएँ (Limitations of Diagrammatic Presentation)

आकड़ों का चित्रमय प्रदर्शन यद्यपि बहुत उपयोगी है, फिर भी चित्र सारणियों का स्थान नहीं ले सकते, क्योंकि चित्रों द्वारा आँकड़ों को प्रदर्शित करने की अनेक सीमाएँ हैं जिनमें से मुख्य निम्नलिखित हैं

(1) चित्रों द्वारा केवल सीमित सख्यात्मक सूचना ही दी जा सकती है। अधिक सूचना को प्रदर्शित करने से चित्र जटिल हो जाते हैं और ठीक ढंग से समझे नहीं जा सकते।

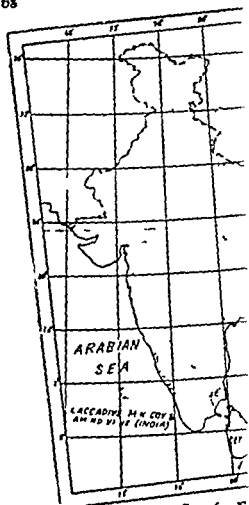
(2) चित्रों के द्वारा केवल अपसन्नित (Approximate) सूचना ही दी जा सकती है। चित्र छोटे छोटे भागों या अंतरों को प्रदर्शित नहीं कर सकते।

(3) चित्रों का दुरुपयोग आसानी से किया जा सकता है। अतः कोई भी व्यक्ति अपना उल्लू सीधा करने के लिए चित्रों की किसी भी तरह से व्याख्या (Interpret) कर सकता है।

(4) चित्रों का आँकड़ों के विश्लेषण में कोई योग नहीं होता।

(5) काल माला (Time Series) व आवृत्ति वितरण (Frequency Distributions) सम्बन्धी आँकड़ों को चित्रों द्वारा प्रदर्शित नहीं किया जा सकता।

(6) चित्रों के बनाने में अधिक समय और अधिक परिश्रम लगता है।



चित्र 6-घ

(8) निम्न सारणी में दिये गये आँकड़ों का बहुदण्ड चित्र प्रदर्शन कीजिए ।

योजना	बचत दर (प्रतिशत)	निवेश दर (प्रतिशत)
पहली योजना	60	80
दूसरी योजना	85	110
तीसरी योजना	115	134
वार्षिक योजनाएँ	84	12*2
चौथी योजना	100	108

(9) चित्र लेख (Pictogram) क्या है ? इसका प्रयोग कब किया जाता है ?

निम्न आँकड़ों को चित्र लेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए ।

देश	भारत	अमरीका	चीन
गायें	180	94	20

(करोड़ों में)

(10) नीचे दी गई सारणी 1973-76 के बीच भारत में लोगों के पास मुद्रा-पूर्ति (Money Supply) का ब्यौरा देती है

	(करोड़ रुपये में)			
	1973	1974	1975	1976
नोट (Notes)	4500	5400	5380	5640
रुपये के सिक्के (Rupee coins)	350	360	320	360
छोटे सिक्के (Small Coins)	310	290	300	375
जमा मुद्रा (Deposit Money)	340	400	400	375
कुल (Total)	5,500	5,350	6,400	6,750

स्रोत R B I Bulletin Jan 1977

उपरोक्त आँकड़ों को उपविभाजित दण्ड चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए ।

अभ्यास के लिए प्रश्न  
(EXERCISES)

- 70
- (1) सांख्यिकीय आँकड़ों के चित्रमय प्रदर्शन के गुण और सीमाओं को बताइए।
- (2) चित्रों की संरचना करते समय आप किन बातों को ध्यान में रखेंगे?
- (3) चित्रों के विभिन्न प्रकार कौन-कौन से हैं? अपने उत्तर का स्पष्टीकरण कीजिए।
- (4) दण्ड चित्र और वृत्तीय चित्र में अंतर स्पष्ट कीजिए।
- (5) निम्न सारणी में 50 वर्षों में भारत की जनसंख्या वृद्धि को बताती है। दण्ड चित्र द्वारा आँकड़ों को प्रस्तुत कीजिए।

वर्ष	1921	1931	1941	1951	1961	1971
जनसंख्या	251	279	319	361	439	548

(बरोहो में)

- (6) उपविभाजित कोणीय चित्र (subdivided angular diagrams) क्या हैं? उनका प्रयोग कब किया जाता है?
- निम्न सारणी भारत की जनसंख्या का विभाजन धर्म के आधार पर (according to religion) प्रस्तुत करती है।

धर्म	हिन्दू	मुसलिम	ईसाई	सिख	अन्य
जनसंख्या (लाखों में)	4540	615	145	100	80

- उपरोक्त आँकड़ों को कोणीय चित्र (Pie diagram) द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

- (7) निम्न सारणी 1971 में भारत के व्यवसाय वितरण (occupational structure) को प्रस्तुत करती है।
- | क्षेत्र (Sector) | प्रतिशत (Percentage) |
|------------------|----------------------|
| प्राथमिक         | 72.1                 |
| द्वितीय          | 11.2                 |
| तृतीय            | 16.7                 |
|                  | <hr/>                |
|                  | 100.0                |

उपरोक्त आँकड़ों को एक उचित चित्र द्वारा निरूपण कीजिए।

बिंदु (Point of origin)। अक्ष  $x$  पर "O" बिंदु से दाईं ओर साकारात्मक (Positive) मूल्य तथा "O" बिंदु की बाईं ओर  $x$  अक्ष पर नाकारात्मक (Negative) मूल्य का दिखाया जाता है। मूल बिंदु पर मूल्य शून्य (Zero) होता है।  $y$  अक्ष पर साकारात्मक मूल्य ऊपर की ओर दिखाया जाता है और नाकारात्मक मूल्य नीचे की ओर दिखाया जाता है। अतः  $x$  अक्ष और  $y$ -अक्ष ग्राफ पेपर को 4 भागों में — I, II, III और IV में बाँट देते हैं। इन चार भागों को चरण I, II, III तथा IV (Quadrants I, II, III and IV) कहते हैं। यदि  $x$  और  $y$  दो चर (variables) हैं और दोनों के मूल्य साकारात्मक हैं तो उन मूल्यों का चरण I (Quadrant I) में अंकित किया जायेगा। यदि  $x$  चर  $y$  चर (Variables) के मूल्य नाकारात्मक है तो उन मूल्यों का चरण III (Quadrant III) में अंकित किया जायेगा। यदि  $x$  चर का मूल्य नाकारात्मक है और  $y$  चर का मूल्य साकारात्मक है तो उन मूल्यों को चरण IV (Quadrant IV) में अंकित किया जायेगा। यदि  $x$  चर का मूल्य साकारात्मक है और  $y$  चर का मूल्य नाकारात्मक है तो इन मूल्यों का चरण II (Quadrant II) में अंकित किया जायेगा।

ग्राफ बनाते समय स्वतंत्र चर (Independent variable) को  $x$ -अक्ष पर मापना चाहिए और आश्रित चर (Dependent Variable) का  $y$  अक्ष पर मापना चाहिए। रेखाचित्र के लिए मापदण्ड (Scale) का चुनाव मावधानी से करना चाहिए ताकि सभी मूल्यों को आसानी से मापा जा सके। मापदण्ड प्राकृतिक या आवश्यकता के अनुसार अनुपातिक भी रखा जा सकता है।

### (क) काल श्रृंखलाओं के रेखाचित्र (Graphs of Time Series)

काल मालाओं या श्रृंखलाओं के रेखाचित्र वे रेखाचित्र हैं जो समय के आधार पर एक या एक से अधिक चरों में सद्योत्पन्न परिवर्तनों को दिखाते हैं। इन रेखाचित्रों का कालिक चित्र (Historiogram) भी कहा जाता है।

काल-मालाओं के रेखाचित्र बनाने के नियम (Rules for constructing the time series graphs)

- (1) समय की इकाइयाँ  $x$  अक्ष पर लेनी चाहिए और चर का आकार  $y$  अक्ष पर मापना चाहिए।
- (2) समय की इकाइयाँ (जैसे वर्ष, मास, सप्ताह, दिन आदि) में शून्य (Zero) नहीं होता, अतः  $x$  अक्ष पर पैमाना (Scale) शून्य से आरम्भ नहीं होना चाहिए।
- (3) समय कमी नाकारात्मक लक्ष्य में नहीं होता, अतः चरण II और चरण III का प्रयोग नहीं होता।
- (4) अक्ष  $x$  का बराबर भागों में विभाजित करना चाहिए ताकि प्रत्येक भाग बराबर बराबर समय अवधि का दिखा सकें।



## ऑकड़ों का बिन्दुरेखीय प्रदर्शन

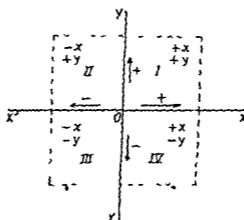
### (GRAPHIC PRESENTATION OF DATA)

काल श्रृंखलाओं (Time series) और आवृत्ति वितरण श्रृंखलाओं (Frequency Distribution Series) के प्रदर्शन के लिए बिन्दुरेखीय विधि (Graphic method) का प्रयोग किया जाता है। बिन्दुरेखीय चित्रों को दो भागों में विभाजित किया जा सकता है

- (क) काल श्रृंखलाओं के रेखाचित्र (Graphs of time series)
- (ख) आवृत्ति वितरणों के रेखाचित्र (Graphs of frequency distributions)

#### रेखा चित्र या ग्राफ बनाने की विधि (Technique of making graphs)

रेखा चित्र या ग्राफ बनाने के लिए या मरद रेखाएँ जोकि एक दूसरे को 90° कोण पर काटती ही बनाई जाती हैं। इन रेखाओं का अक्ष (Axis) कहा जाता है। क्षैतिज (Horizontal) अक्ष (x-axis) और उदय (Vertical) रेखा को Y-अक्ष (Y-axis) कहा जाता है। जिस बिन्दु पर यह दोनों रेखाएँ काटती हैं उसे मूल बिन्दु (Point of Origin) कहा जाता है। इन दोनों रेखाओं को दिखाती है



रेखा चित्र 1

उपरोक्त रेखा चित्र में X-X' अक्ष -x है और Y-Y' अक्ष y है। बिन्दु O मूल

बिंदु (Point of origin)। अक्ष  $x$  पर "O" बिंदु से दाईं ओर साकारात्मक (Positive) मूल्य तथा "O" बिंदु की बाईं ओर  $x$ -अक्ष पर नाकारात्मक (Negative) मूल्य को दिखाया जाता है। मूल बिंदु पर मूल्य शून्य (Zero) होता है।  $y$  अक्ष पर साकारात्मक मूल्य ऊपर की ओर दिखाया जाता है और नाकारात्मक मूल्य नीचे की ओर दिखाया जाता है। अतः  $x$  अक्ष और  $y$ -अक्ष ग्राफ पेपर को 4 भागों में — I, II, III और IV में बाँट देते हैं। इन चार भागों को चरण I, II, III तथा IV (Quadrants I, II, III and IV) कहते हैं। यदि  $x$  और  $y$  दो चर (variables) हों और दोनों के मूल्य साकारात्मक हों तो उन मूल्यों का चरण I (Quadrant I) में अंकित किया जायेगा। यदि  $x$  और  $y$  दोनों चर (variables) के मूल्य नाकारात्मक हों तो उन मूल्यों को चरण III (Quadrant III) में अंकित किया जायेगा। यदि  $x$  चर का मूल्य साकारात्मक है और  $y$  चर का मूल्य नाकारात्मक है तो उन मूल्यों को चरण IV (Quadrant IV) में अंकित किया जायेगा। यदि  $x$  चर का मूल्य नाकारात्मक है और  $y$  चर का मूल्य साकारात्मक है तो इन मूल्यों का चरण II (Quadrant II) में अंकित किया जायेगा।

ग्राफ बनाते समय स्वतंत्र चर (Independent variable) को  $x$ -अक्ष पर मापना चाहिए और आश्रित चर (Dependent Variable) का  $y$  अक्ष पर मापना चाहिए। रेखाचित्र के लिए मापदण्ड (Scale) का चुनाव सावधानी से करना चाहिए ताकि सभी मूल्यों का आसानी से मापा जा सके। मापदण्ड प्राकृतिक या आवश्यकता के अनुसार अनुपातिक भी रखा जा सकता है।

### (क) काल श्रृंखलाओं के रेखाचित्र (Graphs of Time Series)

काल-माला या श्रृंखलाओं के रेखाचित्र वे रेखाचित्र हैं जो समय के आधार पर एक-एक से अधिक चरों में सद्यतात्मक परिवर्तन को दिखाते हैं। इन रेखाचित्रों का कालिक चित्र (Histogram) भी कहा जाता है।

काल-मालाओं के रेखाचित्र बनाने के नियम (Rules for constructing the time series graphs)

(1) समय की इकाइयाँ  $x$  अक्ष पर लेनी चाहिए और चर का आकार  $y$ -अक्ष पर मापना चाहिए।

(2) समय की इकाइयाँ (जैसे वर्ष, मास, सप्ताह, दिन आदि) में शून्य (Zero) नहीं होता, अतः  $x$  अक्ष पर पैमाना (Scale) शून्य से आरम्भ नहीं होना चाहिए।

(3) समय कभी नाकारात्मक सद्यता में नहीं होता, अतः चरण II और चरण III का प्रयोग नहीं होता।

(4) अक्ष  $x$  को बराबर-बराबर समय अवधि का दिखाना चाहिए ताकि प्रत्येक भाग बराबर-बराबर समय अवधि का दिखाने में सक्षम हो सके।

(5) जब चर (variables) को  $y$ -अक्ष पर तिया जाये ता  $y$ -अक्ष पर पैमाना शून्य से आरम्भ होना चाहिए। पर तु यदि चर मूल्य अधिक आकार के हैं न मूल बिन्दु से कुछ ऊपर किसी अय सख्या से पैमाना आरम्भ कर लेना चाहिए। इस वा कृत्रिम आधार रेखा (False base line) कहा जाता है।

(6) पैमान का चुनाव ऐसा होना चाहिए जिससे सम्पूर्ण आंकड़ों वा रेखा चित्र म प्रदर्शन किया जा सके।

(7) रेखाचित्र में चर के मूल्यों को बिन्दुओं द्वारा अंकित करना चाहिए न कि त्रसा या चक्रा द्वारा।

(8) ग्राफ पपर पर अंकित बिन्दुओं वा सीधी रेखाओं द्वारा मिलाना चाहिए न कि वक्रा द्वारा।

(9) जब एक ही रेखाचित्र म दो वा अधिक चरों को अंकित किया गया हो ता विभिन्न प्रकार की रेखाएँ जैसे सरल रेखा, टूटी रेखा (broken line), बिन्दु रेखा (dotted line), बिन्दु विराम रेखा (dot dash line), आदि लगाने चाहिए तथा विभिन्न रेखाओं वा अंतर स्पष्ट करने के लिए उनसे सम्बंधित सूचक (Index) भी दे देना चाहिए।

(10) प्रत्येक रेखा चित्र वा एक उपयुक्त शीर्षक देना चाहिए। पैमाने वा समझाने के लिए उनसे सम्बंधित सूचक भी देना चाहिए।

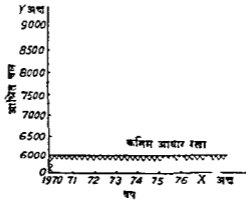
**कृत्रिम आधार रेखा (False Base line)**

ग्राफ वा रेखाचित्र म "कृत्रिम आधार रेखा" (False Base line) द्वारा कानिक श्रेणियाँ (Time series) में छोटे छोटे उतार-चढ़ावों (Fluctuations) का भी स्पष्ट रूप से प्रदर्शित किया जा सकता है। अनेक परिस्थितियाँ में आश्रित चर (Dependent Variable) के मूल्य में बहुत ही कम अंतर होते हैं तथा चर के निम्नतम मूल्य (Smallest value) और मूल बिन्दु (Point of Origin) में बहुत अंतर होना है। ऐसी परिस्थिति से यदि हम  $Y$ -अक्ष पर अपना पैमाना [Scale] मूल बिन्दु पर शून्य से आरम्भ करे ता अंकित मूल्य (Plotted values) बहुत ऊपर होंगे और परिणामस्वरूप रेखाचित्र वा ग्राफ नद्दा लगेगा। इसके अतिरिक्त चल के मूल्यों में बहुत कम अंतर से स्पष्टता से प्रदर्शित नहीं किया जा सकता क्योंकि चर के मूल्यों में बहुत कम अंतर होने के कारण अंकित रेखा लगभग सीधी ही लगेगी। रेखा चित्र म इन कमियों को दूर करने के लिए कृत्रिम आधार रेखा (False Base line) का सहारा लेना पड़ता है।

कृत्रिम आधार रेखा बनाने के लिए  $Y$ -अक्ष पर निरंतर पैमाने (Regular Scale) का बाट दिया जाता है और आश्रित चर (Dependent Variable) के निम्नतम मूल्य के समीप का मूल्य (Value) मूल बिन्दु (Point of origin) से बाड़ा ऊपर आरी के दाँता जसी रेखा  $X$ -अक्ष के समानांतर खींच दी जाती है।

इसी रेखा को कृत्रिम आधार रेखा कहा जाता है। नीचे दिए गए चित्र 2 में कृत्रिम आधार रेखा को प्रदर्शित किया गया है।

मान लीजिए कि आश्रित चर का निम्नतम मूल्य 6100 है। हम अक्ष—Y पर मूल बिन्दु O से थोड़ा ऊपर 6000 लिख देंगे और अक्ष—X के समानांतर भारी के दाते जैसी एक रेखा खींच देंगे जैसा कि निम्न चित्र में दिखाया गया है। Y—अक्ष पर पमाना इसी के आधार पर लिया गया है। इसी रेखा का नाम कृत्रिम आधार रेखा (False Base line) है।



रेखा चित्र 2

एक चर के रेखा चित्र (Graphs of one Variable)

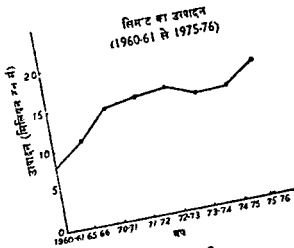
उदाहरण 1

निम्न आंकड़ा को एक रेखा चित्र द्वारा प्रस्तुत कीजिए।

वर्ष (Years)	सीमेंट का उत्पादन-मिलियन टन में (Production of Cement in Million Tonnes)
1960—61	8 0
1965—66	10 8
1970—71	14 4
1971—72	15 0
1972—73	15 6
1973—74	14 7
1974—75	14 7
1975—76	17 2

हल

X-अक्ष पर समय अर्थात् वर्षों को दिखाया गया है और Y—अक्ष पर सीमेंट का उत्पादन टना में दिखाया गया है। उपरोक्त आंकड़ा का ग्राफ पर पर अंकित करने के पश्चात् उनको मिला दिया गया है जैसा कि अगले पृष्ठ पर रेखा चित्र 3 में दिखाया गया है।



रेखा चित्र-3

उदाहरण 2

निम्न आंकड़ों का रेखीय प्रदर्शन कीजिए—

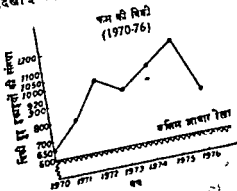
वर्ष (Year)
1970
1971
1972
1973
1974
1975
1976

कम की बिक्री (इकाइयों में)  
(Sale of Firm—in Units)

650
800
1000
920
1050
1150
850

हल

X—अक्ष पर समय अर्थात् वर्षों को लिया गया है और Y-अक्ष पर कम की बिक्री इकाइयों में दिखाई गई है। उपरोक्त आंकड़ों को ग्राफ पेपर या साधारण



रेखा चित्र-4

काबू पर बाँट कर के उदाहरण लकड़ों से बनाये द्वारा किया गया है  
 गैस कि गिद्धे पूछ कर के रेखा चित्र 4 में प्रदर्शित किया गया है।

दो म दो के बाँट कर के रेखा चित्र (उदाहरण 3) में प्रदर्शित किया गया है।

मापक की इकाई (Unit of measurement) समान होने पर दो म दो के  
 के बाँट कर कर के एक ही रेखा चित्र में प्रदर्शित किया जा सकता है।  
 मनु प्रदेक काँचन कर के लिए कम्प-कम्प प्रकार के रेखा चित्रों में सरल रेखा  
 (Simple line) डूले रेखा (Broken line), बिन्दु रेखा (Dot and line) आदि  
 बनने के लिए नॉक रेखा चित्र को आसानी से समझा जा सके।

**उदाहरण 3**

निम्न आँकड़ों को एक उपयुक्त रेखा चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

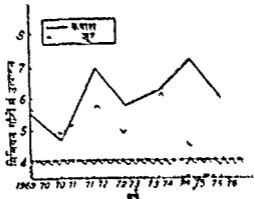
भारत में बरफ़ एक जूट का उत्पादन

(मिनिटन मीठ में)

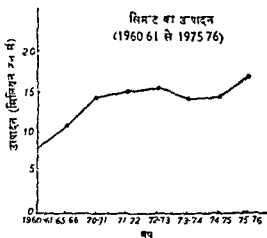
वर्ष (Year)	बरात (Crop)	जूट (Jute)
1969-70	5.57	5.66
1970-71	4.76	4.24
1971-72	6.95	5.88
1972-73	5.74	4.98
1973-74	6.31	6.22
1974-75	7.16	4.47
1975-76	6.10	4.44

हम

रेखा चित्र में चरों (variables) में छोटे अन्तरों को प्रस्तुत करने के लिए  
 हम ने कृत्रिम आधार रेखा (False base line) का प्रयोग किया है। (नीचे रेखा  
 चित्र 5 को देखिए।)



रेखा चित्र-5



रेखा चित्र—3

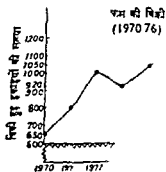
**उदाहरण 2**

निम्न आंकड़ा का रेखीय प्रदर्शन कीजिए—

वर्ष (Year)	फर्म की बिक्री (इकाई) (Sale of Firm—m <sup>3</sup> )
1970	650
1971	800
1972	1000
1973	920
1974	10
1975	1
1976	

हल

X—अक्ष पर समय अर्थात् वर्षों को लिखा गया है  
की बिक्री इकाइयां में दिखाई गई है। उपरोक्त आंकड़ा



चित्र द्वारा किया जाता है ता इसे आवृत्ति वितरण का रेखा चित्र (Graph of Frequency Distribution) कहा जाता है। इन रेखा चित्रों में चर या मद के मूल्य का x— अक्ष पर और उनकी आवृत्तियों को y— अक्ष पर दिखाया जाता है। आवृत्ति वितरणों के रेखा चित्रों के प्रकार (Types of Frequency Distribution Graphs)

आवृत्ति वितरण का निम्नलिखित मुख्य रेखा चित्रों में प्रदर्शित किया जा सकता है—

- (1) रेखा आवृत्ति ग्राफ (Line Frequency Graph)
- (2) आवृत्ति-आयत (Histogram)
- (3) आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon)
- (4) आवृत्ति वक्र (Frequency Curve)
- (5) संचयी आवृत्ति वक्र (Ogive or Cumulating Frequency Curve)

अब हम बारी-बारी से प्रत्येक की संक्षिप्त व्याख्या देकर उसका प्रदर्शित करेंगे।

#### (1) रेखा आवृत्ति ग्राफ (Line Frequency Graph)

रेखा आवृत्ति ग्राफ केवल खण्डित (Discrete) आवृत्ति वितरणों को प्रदर्शन करने के लिए प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण 5

निम्न आंकड़ों का रेखा आवृत्ति ग्राफ (Line Frequency Graph) द्वारा प्रदर्शन कीजिए।

मद का मूल्य	2	3	4	5	6	7	8	9
आवृत्ति	2	3	5	8	6	4	2	1

हल

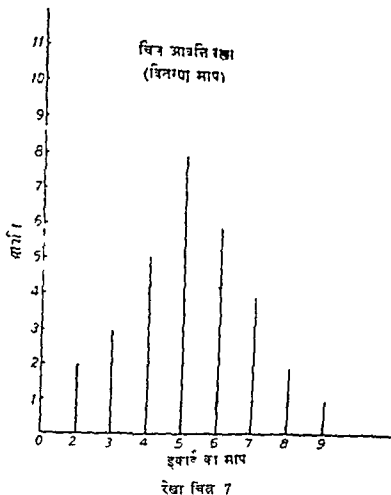
रेखा आवृत्ति ग्राफ बनाने के लिए चर या मद के मूल्यों का x—अक्ष पर और उनकी आवृत्तियों को y—अक्ष पर लिया जाता है। मद के प्रत्येक मूल्य पर खड़ी रेखा (Vertical line) जिसकी लम्बाई उस मूल्य की आवृत्ति के बराबर होती है बनाई जाती है। जगल पृष्ठ पर दिए रेखा चित्र में उपरोक्त आंकड़ों का रेखा आवृत्ति ग्राफ द्वारा प्रदर्शन किया गया है।

#### (2) आवृत्ति आयत (Histogram)

आवृत्ति वितरण को आवृत्ति आयत चित्र द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है। x—अक्ष पर वर्ग-तर (Class intervals) लिए जाते हैं और y—अक्ष पर उनकी आवृत्तियाँ (frequencies) ली जाती हैं। वर्ग-तरों और आवृत्तियों को मिलाने से आयत (Rectangles) को बनाया जाता है। आवृत्ति आयत चित्र से आयतों को खड़े रूप में रखा जाता है। आवृत्ति आयत चित्र दो प्रकार के हो सकते हैं—

(क) जब आवृत्ति वितरण के वर्ग-तर समान हों और (ख) जब आवृत्ति वितरण के वर्ग-तर असमान हों।





समान वर्गों तर वाली आवृत्ति आयत (Histogram of Equal Class Intervals)

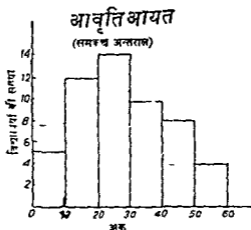
उदाहरण 6

निम्नलिखित आकडा की सहायता स एक आवृत्ति आयत (Histogram) बनाइए ।

अंक	छात्रा की संख्या (आवृत्ति)
0—10	5
10—20	12
20—30	14
30—40	10
40—50	8
50—60	4

हल

X अक्ष पर वर्गान्तर और Y-अक्ष पर उनकी आवृत्तियाँ की लिया जाता है। तत्पश्चात् समीपवर्ती आयतों को बनाया जाता है। प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल उस वर्ग की आवृत्ति का प्रस्तुत करता है। नीचे दी गई रेखा चित्र 8 उपरोक्त आकड़ों का आवृत्ति आयत (Histogram) द्वारा प्रदर्शन करती है।



रेखा चित्र 8

असमान वर्गान्तर वाली आवृत्ति आयत (Histogram of Unequal Class-Intervals)

उदाहरण 7

नीचे दिए गए आकड़ों को आवृत्ति आयत में प्रस्तुत कीजिए।

अंक	छात्रों की संख्या (आवृत्ति)
0—5	2
5—10	6
10—20	12
20—30	15
30—45	12
45—55	6

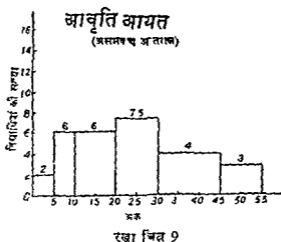
हल

इस प्रकार की आवृत्ति बनाने के लिए सभी वर्गों की आवृत्तियों (frequencies) को निम्नतम वर्गान्तर (Minimum class interval) में अनुसार सशोधित कर लिया जाता है। उपरोक्त उदाहरण में निम्नतम वर्गान्तर 5 है। वर्ग 10—20 का आकार निम्नतम वर्गान्तर जो कि 5 है से दो गुणा है। अतः 10—20 वर्ग की आवृत्ति को 2 से भाग देंगे तो सशोधित आवृत्ति (Adjusted frequency) 6

हागी। इसी प्रकार दूसरे वर्गों की आवृत्तियों को भी सशोधित कर लिया जाता है जसा कि निम्न सारणी में किया गया है

वर्गांतर	छात्रों की संख्या (आवृत्ति)	सशोधित आवृत्ति
0—5	2	2
5—10	6	6
10—20	12	$12/2=6$
20—30	15	$15/2=7.5$
30—45	12	$12/3=4$
45—55	6	$6/2=3$

अब उपरोक्त के आधार पर आवृत्ति आयत को नीचे रेखा चित्र 9 में प्रस्तुत किया गया है



आवृत्ति आयत—जब वर्गांतर समावेशी रीति द्वारा दिए गए हों (Histogram—When Class Intervals are Given by Inclusive Method)

उदाहरण 8

निम्न आँकड़ों से एक आवृत्ति आयत बनाइए।

अंक	आवृत्ति
10—19	3
20—29	4
30—39	7
40—49	5
50—59	4
60—69	2

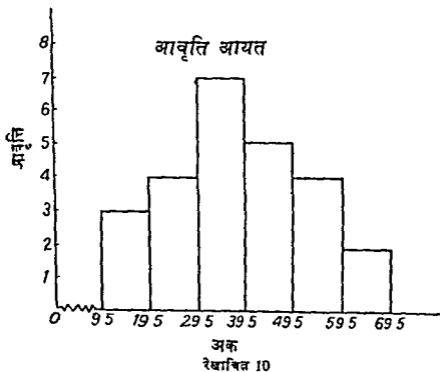
हल

उपरोक्त उदाहरण में वर्गों में समावेशी रीति (Inclus ve method) द्वारा दिये गए हैं। इसमें प्रत्येक वर्ग की निम्न सीमा तथा उच्च सीमा उसी वर्ग में सम्मिलित की गई है। अतः इस स्थिति में आवृत्ति आयत बनाने के लिये यह आवश्यक है कि निम्न तथा उच्च सीमाओं का इस प्रकार सशोधन किया जाये कि सशोधित वर्गों से समीपवर्ती (adjacent) आवृत्तियाँ बन जायें। सशोधित वर्गों में निम्न सारणी में दिये गए हैं

सशोधित वर्गों में (Adjusted Class Intervals)

अंक (Marks)	आवृत्ति (Frequency)
9.5—19.5	3
19.5—29.5	4
29.5—39.5	7
39.5—49.5	5
49.5—59.5	4
59.5—69.5	2

निम्न रेखाचित्र 10 उपरोक्त आंकड़ों से आवृत्ति आयत का प्रदर्शन करता है



### (3) आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon)

आवृत्ति बहुभुज से अभिप्राय आवृत्ति वितरण को प्रदर्शित करने वाली एक वक्र से होता है।

आवृत्ति बहुभुज—आवृत्ति आयत के साथ (Frequency Polygon—with Histogram)

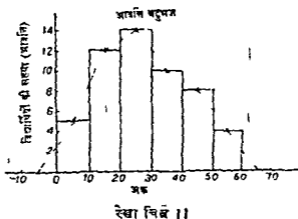
#### उदाहरण 9

निम्न आवृत्ति वितरण के आधार पर एक आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon) बनाइए

अंक (Marks)	छात्रांश की संख्या (आवृत्ति)
0—10	5
10—20	12
20—30	14
30—40	10
40—50	8
50—60	4

हल

उपरोक्त आकड़ा से एक आवृत्ति आयत (Histogram) बनाइए। तत्पश्चात् उसकी सभी आयतों की ऊपरी भुजाओं के मध्य बिंदुओं को सीधी रेखाओं द्वारा मिला कर एक आवृत्ति बहुभुज बनाइए जैसा कि रेखाचित्र II में दिखाया गया है।



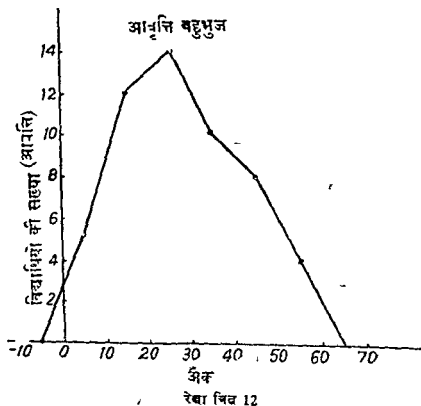
आवृत्ति बहुभुज-आवृत्ति आयत के बिना (Frequency Polygon—without Histogram)

उदाहरण 10

उदाहरण 9 में दिए गये आवृत्ति वितरण से (बिना आवृत्ति आयत बनाए) एक आवृत्ति बहुभुज बनाइए।

हल

आवृत्ति आयत को बनाए बिना भी हम आवृत्ति बहुभुज को बना सकते हैं। इस विधि में अन्तर्गत प्रत्येक वर्गाकार के मध्य बिन्दु और उसकी आवृत्ति को कागज पर अंकित कर लिया जाता है। उन अंकित बिन्दुओं (Plotted Points) को सीधी रेखाओं द्वारा मिला कर एक आवृत्ति बहुभुज बनाई जा सकती है। निम्न रेखाचित्र 12 में इसका प्रदर्शन किया गया है।



#### (4) आवृत्ति वक्र (Frequency Curve)

आवृत्ति वक्र (Frequency Curve) एक सरलित वक्र (Smoothed curve) होती है जोकि आवृत्ति बहुभुज के बिन्दुओं में से इस प्रकार खींची जाती है कि इसके अधीन क्षेत्र (Area) उतना ही रहे जितना कि आवृत्ति बहुभुज के

अधीन हो। अत आवृत्ति वक्र बनाने के लिए सबसे प्रथम हम आवृत्ति आयत (Histogram) बनायेंगे। तत्पश्चात् इसकी सभी आयानों की ऊपरी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को सीधी रेखाओं द्वारा मिला कर आवृत्ति बहुभुज बनायेंगे। अन्त में एक सरलित वक्र द्वारा सरलीकरण करके आवृत्ति वक्र बना लेंगे।

आवृत्ति-वक्र—आवृत्ति आयत के साथ (Frequency Curve—with Histogram)

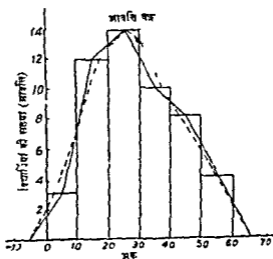
उदाहरण 11

निम्न आवृत्ति वितरण से एक आवृत्ति वक्र (Frequency curve) बनाइए

अंक (Marks)	छात्राद्या की संख्या आवृत्ति
0—10	3
10—20	12
20—30	14
30—40	10
40—50	8
50—60	4

हल :

उपरोक्त आवृत्ति वितरण से बनाई गई आवृत्ति वक्र (Frequency curve) निम्न रेखाचित्र 13 में प्रदर्शित की गई है। इसको बनाने के लिए पहले आवृत्ति आयत व आवृत्ति बहुभुज बनाए गए हैं।



रेखा चित्र 13

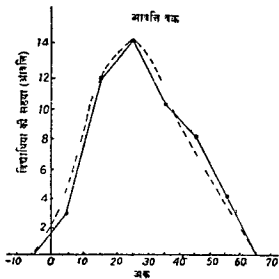
## आवृत्ति वक्र—बिना आवृत्ति आयत (Frequency Curve—Without Histogram)

### उदाहरण 12

उदाहरण 11 में दिए गए आवृत्ति वितरण से (बिना आवृत्ति आयत बनाए) एक आवृत्ति वक्र बनाइए।

हल

आवृत्ति वक्र (Frequency curve) को बिना आवृत्ति-आयत (Histogram) बनाये भी बनाया जा सकता है। परन्तु आवृत्ति वक्र बनाने से पहले आवृत्ति बहुभुज बनाना आवश्यक होता है। इस विधि के अंतर्गत प्रत्येक वर्ग-तर के मध्य बिंदु और उसकी आवृत्ति को पेपर पर अंकित कर लीजिए। उन अंकित बिंदुओं (Plotted points) सीधी रेखाओं द्वारा मिलाकर एक आवृत्ति बहुभुज बनाइये और फिर इसका सरलीकरण करके आवृत्ति वक्र बनाइए, जैसा कि निम्न रेखाचित्र 14 में स्पष्ट किया गया है। आवृत्ति वक्र टूटी रेखा (Broken line) प्रस्तुत की गई है।



रेखाचित्र 14

### (5) संचयी आवृत्ति वक्र या ओगिव वक्र (Cumulative Frequency Curve or Ogive Curve)

ओगिव (Ogive) वक्र संचयी आवृत्ति वक्र होती है। संचयी आवृत्ति वक्रों का सांख्यिकीय विवेचनो में एक विशेष महत्त्व होता है। ओगिव या संचयी वक्रों को बनाने की दो रीतियाँ हैं

(क) "इतने से कम" रीति ('Less than' method)

(ख) "इतने से अधिक" रीति ('More than' method)



## (क) "इनमें से कम" रीति (Less than method)

इस रीति में कम वर्गों की ऊपरी सीमाएँ (Upper class limits) में आरम्भ करते हैं और उनकी आवृत्तियाँ काटते जाते हैं। इस प्रकार हम एक सघनी आवृत्ति विवरण प्राप्त करते हैं। अब हम आवृत्तियों के बीच पर अंकित करते हैं सघनी आवृत्ति वक्र का आकार बनाते हैं।

## उदाहरण 13

निम्न आवृत्तियों का "इनमें से कम" (Less than method) रीति द्वारा एक सघनी आवृत्ति वक्र का आकार निम्न प्रकार से प्रस्तुत कीजिए।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या (आवृत्ति)
0—10	4
10—20	10
20—30	20
30—40	35
40—50	15
50—60	6

## हल

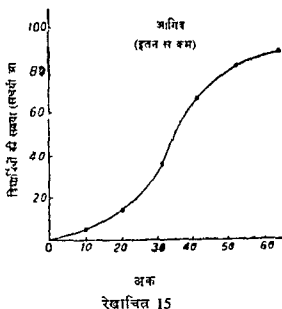
इनमें से कम (Less than) रीति में सघनी वक्र का आकार बनाने के लिए सबसे पहले उपरोक्त वर्गों की ऊपरी सीमाएँ में आरम्भ करते हैं तथा उनकी आवृत्तियों का काट कर एक सघनी तारणी बनाते हैं जमा कि नीचे सघनी तारणी बनाई गई है।

## सघनी आवृत्ति तारणी (Cumulative Frequency Table)

अंक "इनमें से कम" (Marks 'Less than')	विद्यार्थियों की संख्या (सघनी आवृत्तियाँ)
10	4
20	14
30	34
40	69
50	84
60	90

अब X- अक्ष पर अंक और Y अक्ष पर सचय आवृत्तियाँ लीजिए। इनकी वागल पर अंकित कीजिए और एक सरलित रेखा (Smoothed line) द्वारा

इन अंकित बिन्दुओं को मिलाने से सचयी आवृत्ति वक्र या आगिव बन जायेगी जैसा कि निम्न रेखाचित्र 15 में दिखाया गया है।



(ख) "इतने से अधिक रीति ('More than method)

अब हम उदाहरण 13 में दिए गए आकड़ा का "इतने से अधिक" रीति ('More than Method) द्वारा एक सचयी आवृत्ति वक्र या आगिव में प्रस्तुत करते हैं। इस रीति से सचयी आवृत्ति वक्र बनाने के लिए हम वर्गों की निचली सीमाओं (Lower limits of classes) से आरम्भ करके उनकी आवृत्तियों को घटाते जाते हैं। इस प्रकार एक सचयी आवृत्ति सारणी बना ली जाती है जैसे निम्न सारणी बनाई गई है

सचयी आवृत्ति सारणी (Cumulative Frequency Table)

अंक 'इतने से अधिक'	विद्यार्थियों की संख्या सचयी आवृत्तियाँ
0	90
10	86
20	76
30	56
40	21
50	6
60	0

अब X अक्ष पर अंक का भार 1 अक्ष पर सचयी आवृत्तियों को



दोनों ओगिव "इतने से कम" और "इतन से अधिक" एक रेखाचित्र में (Both Ogives Less than' and More than on One Graph)

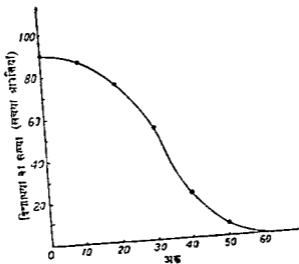
दोनों ओगिव या सचयी आवृत्ति वक्र "इतने से कम" और "इतने से अधिक" को हम एक ही रेखाचित्र में भी दिखा सकते हैं जैसा कि पिछले पृष्ठ के रेखाचित्र 17 में दिखाया गया है।

### अभ्यास के लिए प्रश्न (EXERCISES)

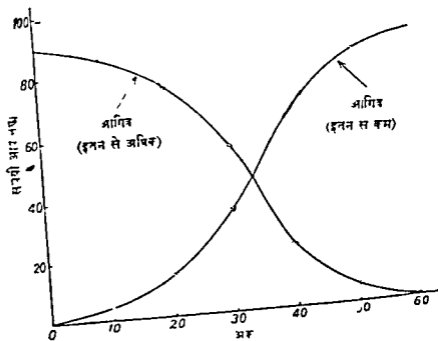
- 1 आकड़ा के बिंदु रेखीय (Graphic) प्रदर्शन की व्याख्या कीजिए।
- 2 कृत्रिम घ्राधार रेखा क्या होती है? किन-किन दशांशों में आप इसका प्रयोग करेंगे?
- 3 विभिन्न प्रकार के बिंदु रेखीय चित्रों (Graphs) का वर्णन कीजिए।
- 4 एक बिंदु रेखाचित्र (Graph) बनाने के मुख्य नियमों की व्याख्या कीजिए।
- 5 मारणिया और चित्रों की तुलना में बिंदु रेखीय (Graphic) प्रदर्शन के लाभ बताइए।
- 6 आवृत्ति वितरण (Frequency distributions) का प्रदर्शन किन किन रूपों में किया जा सकता है?
- 7 आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon) और आवृत्ति आयात (Histogram) के अंतर का उदाहरणों द्वारा स्पष्ट कीजिए।
- 8 आवृत्ति आयात (Histogram) और बालिव चित्र (Histogram) के अंतर का उदाहरण देकर स्पष्ट कीजिए।
- 9 निम्नलिखित का अर्थ स्पष्ट कीजिए
 

(क) आवृत्ति आयात	(ख) ओगिव (Ogive)
(ग) आवृत्ति बहुभुज,	(घ) सरलित आवृत्ति वक्र
	(Smoothed frequency curve)
- 10 निम्न आँकड़ा को काल मापना के रेखाचित्र (Graph of time series) द्वारा कीजिए

दिखाइए। इन को पेपर पर अंकित करने से सचयी आवृत्ति वक्र या ओगिव बन जाएगी जैसा कि रेखा चित्र 16 में दिखाया गया है।



रेखाचित्र 16



रेखाचित्र 17

दोनों ओगिव "इतने से कम" और "इतने से अधिक एक रेखाचित्र में (Both Ogives Less than' and More than on One Graph)

दोना आगिव या सचयी आवृत्ति वक्र "इतने में कम" और "इतने से अधिक" को हम एक ही रेखाचित्र में भी दिखा सकते हैं जैसा कि पिछले पृष्ठ के रेखाचित्र 17 में दिखाया गया है।

### अभ्यास के लिए प्रश्न (EXERCISES)

- 1 आकड़ा के बिंदु रेखीय (Graphic) प्रदर्शन की व्यवस्था कीजिए।
- 2 कृत्रिम घ्राधार रेखा क्या होता है? किन-किन दशांशों में आप इसका प्रयोग करेंगे?
- 3 विभिन्न प्रकार के बिंदु रेखीय चित्रों (Graphs) का वर्णन कीजिए।
- 4 एक बिंदु रेखाचित्र (Graph) बनाने के मुख्य नियमों की व्याख्या कीजिए।
- 5 मारणिया और चित्रों की तुलना में बिंदु रेखीय (Graphic) प्रदर्शन के लाभ बताइए।
- 6 आवृत्ति वितरण (Frequency distributions) का प्रदर्शन किन-किन रूपों में किया जा सकता है?
- 7 आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon) और आवृत्ति आयत (Histogram) के अंतर का उदाहरणों द्वारा स्पष्ट कीजिए।
- 8 आवृत्ति आयत (Histogram) और कालिक चित्र (Histogram) के अंतर को उदाहरण देकर स्पष्ट कीजिए।
- 9 निम्नलिखित का अर्थ स्पष्ट कीजिए
 

(क) आवृत्ति आयत	(ख) आगिव (Ogive)
(ग) आवृत्ति बहुभुज,	(घ) सरलित आवृत्ति वक्र (Smoothed frequency curve)
- 10 निम्न आकड़ा को काल मांसाया के रेखाचित्र (Graph of time series) द्वारा प्रस्तुत कीजिए

जनगणना वर्ष  
(Census Year)

कुल जनसंख्या से शहरी जनसंख्या का प्रतिशत  
(Percentage of Urban Population to the Total Population)

1901	18 84
1911	10 29
1921	11 18
1931	11 99
1941	13 86
1951	17 29
1961	17 97
1971	19 19

11 निम्नलिखित आंकड़े घोक मूल्य सूचकांक से सम्बन्धित हैं। इनको रेखाचित्र (Graph) द्वारा प्रस्तुत कीजिए

वर्ष (Year)	खाद्य वस्तुएँ (Food Article)	निर्मित वस्तुएँ (Manufactured Articles)
1968	306	286
1969	383	346
1970	391	347
1971	416	354
1972	399	401

12 निम्न सारणी में दिए गये आवृत्ति वितरण से

- (क) आवृत्ति आयत, (ख) आवृत्ति बहुभुज तथा  
(ग) आवृत्ति वक्र बनाइये

वर्गान्तर (Class Interval)	आवृत्ति (Frequency)
3—5	20
5—10	25
10—15	40
15—20	32
20—25	27
25—30	12

13 आवृत्ति मापत (Histogram) बनाये बिना निम्न आँकड़ा से (क) आवृत्ति बहुभुज तथा (ख) आवृत्ति वक्र बनाइये

सजदूरी (रु० मे)	मावत्ति
50—60	8
60—70	12
70—80	55
80—90	65
90—100	73
100—110	72
110—120	81
120—130	62
130—140	46

14 निम्न आँकड़ों के ओगिव वक्र (Ogive curve) बनाइए :

अंक (Marks)	आवृत्ति (Frequency)
0—10	4
10—20	10
20—30	16
30—40	22
40—50	20
50—60	18
60—70	8
70—80	2

15 निम्न आँकड़ा से आवृत्ति मापत (Histogram) बनाइये

अंक (Marks)	आवृत्ति (Frequency)
0—10	4
10—20	10
20—30	16
30—40	22
40—50	20
50—60	18
60—70	8
70—80	2



16 एक स्कूल की 12वीं कक्षा के विद्यार्थियों के मासिक जेबखर्च भत्ता (Pocket money allowance) से सम्बन्धित दिये गये आकड़ा से एक आवृत्ति आयत (Histogram) बनाइये

कक्षा का आकार	0—5	5—10	10—15	15—20
जेब खर्च (₹० में)	5	10	15	20
कक्षा का आकार	20—25	25—30	30—35	35—40
जेब खर्च (₹० में)	25	15	10	2

(दिल्ली बोर्ड 1978)

17 निम्न आवृत्ति वितरण से एक आवृत्ति आयत बनाइये

वेतन (₹० में)	मजदूरी की संख्या (आवृत्ति)	वेतन (₹० में)	मजदूरों की संख्या (आवृत्ति)
0—5	5	20—30	12
5—10	7	30—50	12
10—15	19	50—70	8
15—20	22		

18 निम्न आँकड़ों से एक आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon) बनाइये

वेतन (₹० में)	आवृत्ति	वेतन (₹० में)	आवृत्ति
200—225	3	275—300	21
225—250	7	300—325	5
250—275	12	325—350	2

19 निम्न आँकड़ों को एक आवृत्ति आयत द्वारा प्रस्तुत कीजिए

अंक (Marks)	छात्राओं की संख्या	अंक (Marks)	छात्राओं की संख्या
5—9	4	20—24	32
10—14	17	25—29	13
15—19	25	30—34	6

20 निम्न आँकड़ों से आवृत्ति आयत तथा आवृत्ति बहुभुज बनाइये

अंक (Marks)	आवृत्ति (Frequency)	अंक (Marks)	आवृत्ति (Frequency)
0—10	4	40—50	20
10—20	10	50—60	18
20—30	16	60—70	8
30—40	22	70—80	2

## सख्यात्मक आकड़ों की परिशुद्धता, उपसादन, अनुपात, दर एवं प्रतिशत

(ACCURACY OF QUANTITATIVE DATA, APPROXIMATION RATIOS RATES AND PERCENTAGES)

इस अध्याय में हम सारिकीय विश्लेषण के उपकरणों के रूप में सख्यात्मक आकड़ों की परिशुद्धता उपसादन, अनुपात, दर एवं प्रतिशत से सम्बन्धित कुछ तत्वों (aspects) का विवेचन करेंगे। इन उपकरणों (tools) की सहायता से सकलित आकड़े सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए अधिक उपयुक्त हो जाते हैं।

### आकड़ों की परिशुद्धता (Accuracy of Data)

सख्यात्मक आकड़ों (Quantitative data) में शत प्रतिशत परिशुद्धता सम्भव नहीं हो सकती। सामाजिक विज्ञान में प्राकृतिक विज्ञानों की भाँति तथ्या का नाप शुद्ध रूप में नहीं किया जा सकता क्योंकि इन विज्ञानों में तथ्यों की सत्यता को प्रयोगशाला (Laboratory) में जाँचा नहीं जा सकता। अतः इन विज्ञानों के परिणाम अधिकांश रूप से अनुमानों के आधार पर लगाये जाते हैं। सांख्यिकीय भी एक सामाजिक विज्ञान है। इसलिए सकलित आकड़ों में पूर्ण परिशुद्धता नहीं हो सकती। आकड़ों के सकलन में यदि हम कितने भी सावधान और मत्क रहें फिर भी अनुसंधानकर्ता की अज्ञानता एवं लापरवाही तथा सांख्यिकीय उपकरणों (Statistical Tools) की अपूर्णता (Imperfection) के कारण विभ्रम (errors) हो जाते हैं। इसलिए सांख्यिकी में परिशुद्धता से अभिप्राय शत प्रतिशत परिशुद्धता नहीं बल्कि यथावत सर्वाधिक परिशुद्धता (Reasonable Standard of Accuracy) से होता है। उदाहरण के लिए मनुष्या की ऊँचाई नापने में एक सेटमीटर के दसवें भाग तक नापना यथोचित परिशुद्धता है परंतु दिल्ली में आगरा तक की दूरी नापने में केवल किलोमीटर तक नापना ही यथोचित परिशुद्धता है।

### आकड़ों का उपसादन (Approximation or Rounding off Data)

आकड़ों की बड़ी-बड़ी संख्या के उपसादन का उद्देश्य यह होता है कि जटिल आकड़े सरल हो जायें ताकि उन्हें आसानी से समझा जा सके। इस प्रकार उपसादित या छोटे किये गए (Approximated or Rounded off) आकड़ों को न केवल आसानी से समझा जा सकता है बल्कि आर्थिक विश्लेषण के लिए तुलना या गणतीय क्रियाएँ करना भी आसान हो जाता है।

आंकड़ों के उपसादन की विधियाँ (Methods of Approximation or Rounding Off Data)

आंकड़ों के उपसादन की कुछ सवमाय विधियाँ निम्नलिखित हैं परन्तु इनमें से प्रथम विधि सबसे अधिक शुद्ध मानी जाती है।

(1) निकटतम पूण सख्या तक उपसादन (Rounding Off or Approximation to the Nearest Whole Number)

इस विधि के अनुसार वास्तविक सख्या के स्थान पर निकटतम पूण सख्या (Nearest Whole Number) लिख दी जाती है। उदाहरण के लिए यदि अका का निकटतम हजार तक उपसादन करना हो तो —6,48,532 को 6,49,000 माना जायेगा। (निकटतम 1000 तक उपसादित अक)

और 4,78,320 को 4,78,000 माना जायेगा।  
(निकटतम 1000 तक उपसादित अक)

इस विधि में नियम यह है कि (मान लीजिए) अका का हजार तक उपसादन करना है तो यदि अक हजार के भाग से कम है तो छोड़ दिया जाता है और यदि हजार के भाग से अधिक है तो इसको पूण सख्या (Whole number) मान लिया जाता है (यहाँ 1000 पूण सख्या है) अतः पहले उदाहरण में 532 क्योंकि 1000 के भाग से अधिक है, को 1000 मान लिया गया है और अक उपसादित होकर 6,49,000 बन गया है। दूसरे उदाहरण में अक 320 को छोड़ दिया गया है क्योंकि यह 1000 के भाग से कम है और उपसादित अक 4,78,000 रह गया है। प्रतिशतों एवं अनुपातों आदि के उपसादन में भी यही नियम लागू होता है। उदाहरणाय 79 7% को 80% लिखा जा सकता है और 64 3% को 64%

लिखा जा सकता है।

(2) वास्तविक सख्या का अगली बड़ी पूण सख्या तक उपसादन (Rounding Off or approximation to the next higher whole number)

इस विधि में वास्तविक सख्या (Actual number) को अगली पूण सख्या तक बढ़ा दिया जाता है। उदाहरण—

6,48,532 को 6,49,000 माना जायेगा  
(1000 तक उपसादित अक)

और 4,78,320 को 4,79,000 माना जायेगा।  
(1000 तक उपसादित अक)

इसी प्रकार 79 7 प्रतिशत को 80 प्रतिशत लिखा जायेगा और 64 3 प्रतिशत को 65 प्रतिशत लिखा जायेगा।

(3) कुछ अकों को बिल्कुल छोड़कर उपसादन (Approximation or Rounding off by Dropping Certain figures altogether)

इस विधि में परिशुद्धता के यथोचित स्तर को ध्यान में रखत हुए कुछ अकों

को बिल्कुल छोड़ दिया जाता है। अब प्रश्न यह है कि कौन से अंका को छोड़ा जाये। यह इस बात पर निर्भर करता है कि गिनती की परिशुद्धता दहाइया, सकड़ो या हजारो तक रखनी है या इमसे भी अधिक या कम। मान लीजिए कि हमन परिशुद्धता हजारो तक रखनी है तो सख्या 6,48 532 को 6,48 000 माना जायेगा और सख्या 4,78,320 को 4,78,000 माना जायेगा। इस विधि के अनुसार उपसादित (Approximated or Rounded Off) आकड़े अपने वास्तविक मूल्य से सदैव कम हागे।

#### (4) अको का एक या दो दशमलव स्थानो तक उपसादन (Approximation or Rounding Off Figures upto One or Two Decimal Places)

एक या दो दशमलव तक अकों का उपसादन करने के लिए आधे से कम अक को छोड़ दिया जाता है और आधे से अधिक अक को एक के बराबर मान लिया जाता ह। यदि अक 172 585 का दो दशमलव स्थान तक उपसादन करना है तो उपसादित अक 172 59 होगा। इसी तरह अक 172 223 का उपसादित अक 172 22 हागा। पर तु यदि इन अका का उपसादन एक दशमलव स्थान तक करना हो ता अक 172 586 का उपसादित अक 172 6 माना जायेगा और अक 172 223 का उपसादित अक 172 2 माना जायगा।

#### सांख्यिकीय विभ्रम (Statistical Errors)

सांख्यिकी में विभ्रम (Error) से अभिप्राय त्रुटि (Mistake) नहीं होता। यहां विभ्रम मे अभिप्राय किसी तथ्य को उसने गलत रूप मे बताने से है। विभ्रम आंकड़ा की अपर्याप्तता या सांख्यिकीय उपकरणो की अनूणता आदि के कारण पदा होती है। सांख्यिकी मे हम प्राय अनुमानित मूल्य (Estimated Value) का प्रयोग करते हैं न कि वास्तविक मूल्य (actual value) का। प्रो० बोडिंगटन (Boddington) के अनुसार वास्तविक मूल्य (actual value) और अनुमानित मूल्य (Estimated value) के अंतर को विभ्रम कहा जाता है। जब कि त्रुटि (Mistake) से अभिप्राय योग (addition), गुणा (Multiplication) भाग (Division) आदि करने मे होने वाली गलतियो से होता ह।

#### सांख्यिकीय विभ्रम के स्रोत (Sources of Statistical Errors)

सांख्यिकीय विभ्रम के तीन मुख्य स्रोत हैं

##### (1) मूल विभ्रम (Errors of Origin)

ये विभ्रम सांख्यिकीय इकाईयो की दोषपूर्ण परिभाषा, अनुसंधानकर्ता द्वारा पदापातपूर्ण सूचना, सकलित आंकड़ा की अस्थिरता आदि से पैदा होते हैं।

##### (2) प्रहस्तन के कारण विभ्रम (Errors of Manipulation)

इस प्रकार के विभ्रम माप माध्यों, अनुपात व प्रतिशत का गलत प्रयोग करने से पैदा होते हैं।

(3) अपर्याप्तता के कारण विभ्रम (Errors of Inadequacy)  
 इस प्रकार विभ्रम अपर्याप्त या दोषपूर्ण 'यादश' (Sample) तथा अपूर्ण आंकड़ों (incomplete data) के कारण उत्पन्न होते हैं।

सांख्यिकीय विभ्रम के प्रकार (Kinds of Statistical Errors)

- (1) निदर्शन विभ्रम (Sampling Errors)
- (2) गैर निदर्शन (Non Sampling Errors)
- (3) पक्षपातपूर्ण विभ्रम (Biased Errors)
- (4) पक्षपातहीन विभ्रम (Unbiased Errors)

1 निदर्शन विभ्रम (Sampling Errors)

समग्र म से 'यादश' का चुनाव करते समय प्रायः कोई न कोई कमी रह जाती है जिससे 'यादश' समग्र (Universe) की सभी विशेषताओं को व्यक्त नहीं करता अर्थात् वह उसका पणतया प्रतिनिधित्व नहीं करता और इसके कारण विभ्रम पैदा हो जाते हैं। दूसरे सर्वेक्षण के दौरान म अनुसंधानकर्ता द्वारा सकलित आंकड़ों पर उसके पक्षपात की भावना का प्रभाव पड़ता रहता है। इसके कारण भी विभ्रम पैदा हो जाते हैं। इस प्रकार के विभ्रमों को निदर्शन विभ्रम कहा जाता है।

2 गैर निदर्शन विभ्रम (Non Sampling Errors)

गैर निदर्शन विभ्रम वे विभ्रम होते हैं जो कि 'यादश' के चुनाव के कारण पैदा नहीं होते बल्कि गलत मापक यंत्रों एवं उपकरणों के प्रयोग तथा अशिक्षित अनुसंधानकर्ताओं अथवा गणकों द्वारा गलत सांख्यिकीय रीतियों को अपनाने के कारण पैदा होते हैं। आंकड़ों के उपसादन (Rounding Off Data) के कारण भी ऐसे विभ्रम पैदा हो जाते हैं।

3 पक्षपातपूर्ण विभ्रम (Biased Errors)

इस प्रकार के विभ्रम अनुसंधानकर्ताओं या गणकों की पक्षपातपूर्ण भावना या माप की इकाइयों के दोषपूर्ण प्रयोग के कारण पैदा होते हैं। ये विभ्रम संचयी (Cumulative) होते हैं और इकाइयों की सख्या में बढ़ने के साथ बढ़ते जाते हैं।

4 पक्षपातहीन (Un biased Errors)

इस प्रकार के विभ्रम केवल सयोगवश (Just by Chance) पैदा हो जाते हैं न कि किसी पक्षपात आदि के कारण। उदाहरण के लिए यदि अंकों का उपसादन निकटतम पूर्ण सख्या तक किया जाये तो कुछ अंक अपने वास्तविक मूल्य से कम हो जायेंगे और कुछ अधिक। इस कारण से पैदा होने वाले विभ्रमों को पक्षपातहीन विभ्रम कहा जाता है।

## सांख्यिकीय विभ्रमों का मापन (Measures of Statistical Errors)

विभ्रमों का मापन दो प्रकार से किया जा सकता है

(क) निरपेक्ष विभ्रम (Absolute Error) और

(ख) सापेक्ष विभ्रम (Relative Error)

### (क) निरपेक्ष विभ्रम (Absolute Error)

निरपेक्ष विभ्रम वास्तविक मूल्य तथा अनुमानित मूल्य के अंतर को कहते हैं। उदाहरण के लिए यदि एक फर्म की बिक्री की वास्तविक सद्ध्या 19,800 रुपए है, और अनुमानित सद्ध्या 20,000 रुपए हो, तो निरपेक्ष विभ्रम 200 रुपए होगा।

निरपेक्ष विभ्रम साकारात्मक (Positive) या नाकारात्मक (Negative) हो सकते हैं। यदि वास्तविक मूल्य अनुमानित मूल्य से अधिक होगा तो निरपेक्ष विभ्रम साकारात्मक (Positive) होगा और यदि वास्तविक मूल्य अनुमानित मूल्य से कम है तो निरपेक्ष विभ्रम नाकारात्मक (Negative) होगा।

### (ख) सापेक्ष विभ्रम (Relative Error)

सापेक्ष विभ्रम निरपेक्ष विभ्रम का वास्तविक मूल्य से अनुपात है। उपरोक्त उदाहरण में

$$\begin{aligned} \text{सापेक्ष विभ्रम} &= \frac{200 \text{ रु०}}{20,000} \\ &= 0.01 \end{aligned}$$

मूल्य के रूप में

$$\text{सापेक्ष विभ्रम} = \frac{\text{वास्तविक मूल्य} - \text{अनुमानित मूल्य}}{\text{अनुमानित मूल्य}}$$

$$\text{अथवा } R E = \frac{A - E}{E}$$

जहाँ  $R E$  = सापेक्ष विभ्रम (Relative Error)

$A$  = वास्तविक मूल्य (Actual Value)

$E$  = अनुमानित मूल्य (Estimated Value)

सापेक्ष विभ्रम भी निरपेक्ष विभ्रम की तरह साकारात्मक (Positive) या नाकारात्मक हो सकते हैं। जब वास्तविक मूल्य अनुमानित मूल्य से अधिक हो तो सापेक्ष विभ्रम साकारात्मक होगा और यदि वास्तविक मूल्य अनुमानित मूल्य से कम होगा तो सापेक्ष विभ्रम नाकारात्मक होगा।

सापेक्ष विघ्नम को प्रतिशत के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है।  
उपरोक्त उदाहरण में प्रतिशत विघ्नम

$$= \frac{200}{20,000} \times 100$$

$$= 1\%$$

### अनुपात (Ratios)

आकड़े अपने भाग कुछ नहीं बताते। आंकड़ों के द्वारा वांछित निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए उनका विश्लेषण और तुलना करनी होती है। सांख्यिकी में अनुपात (Ratios) के द्वारा एक तथ्य की तुलना दूसरे तथ्य से आसानी से की जा सकती है। सांख्यिकी में अनुपातों का अधिक प्रयोग किया जाता है जैसे पूँजी उत्पत्ति अनुपात, पूँजी श्रम अनुपात, स्त्री पुरुष अनुपात आदि। अनुपात एक भागफल है जो एक राशि को दूसरी राशि से भाग देने से प्राप्त होता है। उदाहरण—मान लीजिए कि एक उद्योग में नियोजित पूँजी की मात्रा 375 करोड़ रुपये है और उसके द्वारा वर्ष भर में 25 करोड़ रुपये के मूल्य का उत्पादन हुआ हो तो—

$$\text{पूँजी उत्पत्ति अनुपात} = \frac{375 \text{ (करोड़ रुपये)}}{25 \text{ (करोड़ रुपये)}}$$

$$= 15$$

एक और उदाहरण को देखिए। मान लीजिए कि 'क' देश में प्रति वर्ष गेहूँ का उत्पादन 40,000 टन होता है और 'ख' देश में 200,000 टन। अब हम कह सकते हैं कि "क" और "ख" देशों में गेहूँ का अनुपात 40,000 : 200,000 अथवा 2 : 10 है। इस प्रकार अनुपात दो संख्याओं में सापेक्षिक तुलना करने के लिए एक सब से सरल उपकरण है।

### प्रतिशत (Percentage)

प्रतिशत से अभिप्राय "प्रति सौ", "सौ में" या "सौवाँ" होता है। प्रतिशत के आधार से अनुपात या समानुपात को समझना और तुलना करना आसान हो जाता है क्योंकि तुलना का आधार समान हो जाता है। उदाहरण के लिए प्रतिशत के आधार पर केरल की जनसंख्या में स्त्रियों का भाग 50.4 प्रतिशत है जबकि पंजाब में यह 46.4 प्रतिशत है। इस प्रकार प्रतिशत के आधार पर दो राज्यों में जनसंख्या में स्त्रियों की संख्या जानना आसमान हो गया है। स्पष्ट है कि केरल की जनसंख्या में स्त्रियों की संख्या जानना आसमान हो गया है। प्रतिशत के आधार के बिना अनुपात को समझना तथा उनकी तुलना करना बहुत कठिन होता है। उदाहरण के लिए केरल और पंजाब की जनसंख्या स्त्रियों का अनुपात क्रमशः  $\frac{10,759,524}{21,347,375}$  और  $\frac{6,284,545}{13,551,000}$  है।

स्त्रियों का अनुपात क्रमशः  $\frac{10,759,524}{21,347,375}$  और  $\frac{6,284,545}{13,551,000}$  है।  
स्त्रियों का अनुपात स्त्रियों का अनुपात इन अनुपातों को समझना और इनकी तुलना

करना कठिन है परंतु जब इन अनुपातों को प्रतिशत के आधार पर दिया जाये तो परिणाम इस प्रकार होंगे

$$\begin{aligned} \text{बेरेल की जनसंख्या में स्त्रियों का भाग} &= \frac{10,759,524}{21,347,375} \times 100 \\ &= 50.4 \text{ प्रतिशत} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{पंजाब की जनसंख्या में स्त्रियों का भाग} &= \frac{6,284,545}{13,551,060} \times 100 \\ &= 46.4 \text{ प्रतिशत} \end{aligned}$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि अनुपातों को जब प्रतिशत के आधार पर व्यक्त किया जाता है तो वे आसानी से समझे जा सकते हैं।

**दर (Rates)**

दो चरों (Magnitudes) के बीच कालिक अनुपात (Ratio shown over period of time) को दर या परिवर्तन की दर (Rate of Change) कहा जाता है। दर एक विशेष प्रकार का अनुपात है जो एक निश्चित समय की अवधि में (Over a period of time) परिवर्तन की दर को मापती है।

सांकेतिक रूप से

$$\text{प्रतिशत परिवर्तन की दर} = \frac{f_1 - f_0}{f_0} \times 100$$

जहाँ  $f_1$  = परिवर्तित मूल्य (Changed Value)  
 $f_0$  = वास्तविक मूल्य (Original Value)

यदि परिणाम साकारात्मक (Positive) होगा तो प्रतिशत परिवर्तन की दर भी साकारात्मक होगी और यदि परिणाम नकारात्मक (Negative) होगा तो प्रतिशत परिवर्तन की दर भी नकारात्मक होगी।

उदाहरणार्थ यदि एक कार की वास्तविक गति 60 किलोमीटर प्रति घण्टा हो और तत्पश्चात् इसको बढ़ाकर 75 किलोमीटर कर दी गई हो तो प्रतिशत परिवर्तन का दर (उपरोक्त सूत्र के अनुसार) इस प्रकार होगा

$$\begin{aligned} \text{प्रतिशत परिवर्तन की दर} &= \frac{f_1 - f_0}{f_0} \times 100 \\ &= \frac{75 - 60}{60} \times 100 \\ &= 25\% \end{aligned}$$

**अनुपात के प्रयोग में सावधानियाँ (Precautions in the Use of Ratios)**

जब अनुपात को प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है तो सम्भवतः इसका दुरुपयोग हो सकता है। अतः अनुपात का प्रतिशत में प्रयोग करते समय निम्न-लिखित बातों का ध्यान रखना चाहिए।



## (1) तुलना का आधार (The Base to be Compared)

तुलना का आधार बहुत छोटा नहीं होना चाहिए । उदाहरण—मान लीजिए कि एक स्कूल के 5 विद्यार्थी एक परीक्षा में बैठे और 2 विद्यार्थियों ने श्रेष्ठता (Distinction) प्राप्त की । अब स्कूल यह कहेगा कि उसके 40 प्रतिशत विद्यार्थियों ने श्रेष्ठता प्राप्त की । इस प्रकार के आँकड़ों में किसी भी व्यक्ति को उस स्कूल की काम कुशलता के बारे में भ्रम हो सकता है । वास्तविक बात तो यह है कि केवल 5 विद्यार्थी ही परीक्षा में बैठे थे । इस उदाहरण में तुलना का आधार बहुत छोटा है ।

## (2) तुलना का परिमाण (The Magnitude to be Compared)

तुलना का परिमाण या स्तर बहुत छोटा नहीं होना चाहिए क्योंकि ऐसा होने से भी परिणाम गलत समझे जा सकते हैं । उदाहरण—मान लीजिए कि समाचार पत्र में लिखा है कि अमुक राज्य में 0010 प्रतिशत जनसंख्या बीमारी से मर गई । यह कथन भी वास्तविक स्थिति का ज्ञान नहीं कराता । लगता है कि बहुत लोग मर गए परंतु वास्तविक बात तो यह है कि उस राज्य में बीमारी से प्रत्येक एक लाख व्यक्तियों के पीछे एक व्यक्ति बीमारी से मरा है ।

### अभ्यास के लिए प्रश्न (EXERCISES)

- 1 आँकड़ों के उपसादन की मुख्य विधियों का उदाहरण सहित लिखिए ।
- 2 निम्नलिखित आँकड़ों का उपसादन उनके सामने लिखे हुए निरटतम मूल्य तक कीजिए

वास्तविक अंक	निरटतम मूल्य तक उपसादन
2,295 595 रुपये	हजार रुपये
8,917,650 रुपये	लाख रुपये
6 153,270 व्यक्ति	हजार व्यक्ति
143,378	सौ रुपये

- 3 अंतर स्पष्ट कीजिए
  - (क) निरपेक्ष तथा सापेक्ष विभ्रम और
  - (ख) पक्षपातपूर्ण और पक्षपातहीन विभ्रम
- 4 सारिणियों में परिशुद्धता का विवेचन कीजिए ।
- 5 निदर्शन सम्बन्धी तथा गैर-निदर्शन सम्बन्धी विभ्रमों में अंतर स्पष्ट कीजिए ।

- 6 टिप्पणियाँ लिखिए
  - (क) अनुपात, (ख) प्रतिशत, और (ग) दर ।

7 "किसी निदशा सर्वेक्षण मे विभ्रम के अनेक स्रोत होते हैं। एक पूण सर्वेक्षण तो वेदल कल्पना मात्र ही है।" इस कथन की समीक्षा कीजिए।

8 सांख्यिकीय विभ्रम से आप क्या समझते हैं ? सबयी तथा पूरक विभ्रमो मे अंतर स्पष्ट कीजिए तथा उनके कारणो पर प्रकाश डालिए।

9 सांख्यिकीय विभ्रम तथा त्रुटि मे अंतर स्पष्ट कीजिए। सांख्यिकीय विभ्रमा को किस प्रकार मापा जा सकता है ?

10 उपसादन क्या होता है ? इसके क्या उद्देश्य हैं ? उपसादन की मुख्य विधिया का विस्तारपूर्वक लिखिए तथा उनकी उपयोगिता बताइये।



## खण्ड 4 (UNIT-4) आकड़ों का संक्षिप्तीकरण (CONDENSATION OF DATA)

अध्याय 9

### केन्द्रीय प्रवृत्तियों के माप (MEASURES OF CENTRAL TENDENCY)

“केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप” अथ सांख्यिकीय माप से तुलना में अधिक महत्त्व रखते हैं क्योंकि ये चलो (Variables) के एक समूह को एक सरल और संक्षिप्त ढंग से निरूपित करते हैं। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप को माध्य (औसत) भी कहा जाता है। माध्य एक वितरण या श्रेणी का प्रतिनिधि अंक होता है। माध्य साधारणतः वितरण या समूह के मध्य भाग में होते हैं। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप या माध्य का अधिक विश्लेषण में इतना महत्त्व है कि सांख्यिकी की औसत का विज्ञान (Science of Averages) कहा जाता है।

#### औसतों के उद्देश्य (Objectives of Averages)

औसतों के निम्नलिखित उद्देश्य हैं

- 1 आंकड़ों के विशाल समूह को सरल और संक्षिप्त करना (To give a concise picture of hugeness of data)

आकड़ों का विशाल समूह आसानी से नहीं समझा जा सकता। औसतों के उदाहरण के लिए भारत के 62 करोड़ व्यक्तियों में से प्रत्येक व्यक्ति की आय को याद रखना सम्भव नहीं किन्तु प्रति व्यक्ति आय (अथवा औसत आय) को याद रखना बहुत आसान है। इसी प्रकार एक श्रेणी के 40 विद्यार्थियों में से प्रत्येक विद्यार्थी का वजन याद नहीं रखा जा सकता परन्तु श्रेणी के विद्यार्थियों के औसत भार (Average weight) आसानी से याद रखा जा सकता है। अतः औसतों (Averages) सांख्यिकीय तथ्या के अनावश्यक विवरण को हटा कर आकड़ों को संक्षिप्त और स्पष्ट रूप में प्रस्तुत करती हैं।

## 2 सांख्यिकीय तथ्यों की तुलना के लिए आधार बनाना (To afford a basis of comparison with other groups)

औसत सांख्यिकीय तथ्यों की तुलना के लिए आधार बनाती हैं और इस प्रकार ये तुलना करने तथा विश्लेषण करने के कार्य को सुगम बनाती हैं। उदाहरण के लिए दो विभिन्न देशों में सभी व्यक्तियों की आय की तुलना करना सम्भव नहीं परन्तु जब प्रत्येक देश में रहने वाले व्यक्तियों की औसत आय की गणना कर ली जाती है तो इन देशों की औसत आय की तुलना आसानी से की जा सकती है।

### औसतों के प्रकार (Types of Averages)

केन्द्रीय प्रवृत्तियाँ या औसतों के अनेक प्रकार हैं जिनमें से मुख्य निम्नलिखित हैं

- (1) समांतर माध्य या समांतर औसत या माध्य (Arithmetic Mean or Arithmetic Average or Mean)
- (2) मध्यका तथा विभाज मूल्य (The Median and Partition values)
- (3) भ्रूमिष्ठक (The Mode)

#### (1) समांतर माध्य या माध्य (Arithmetic Average)

मोटे तौर पर समस्त मदों का जाड़ कर और योगफल को मदों की संख्या से भाग करके समांतर माध्य प्राप्त करते हैं। उदाहरण के लिए 6, 8, 4, 14 मदों का

$$\text{माध्य} = \frac{6+8+4+14}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

सांकेतिक रूप से यदि  $N$  के मूल्य  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$  हैं तो

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{N} \\ &= \frac{\sum x}{N}\end{aligned}$$

जहाँ  $\bar{X}$  = समांतर माध्य

$x$  = व्यक्तिगत अवलोकन या मद

$\sum x$  = विभिन्न मदों या अवलोकनों के मूल्यों का योग

$N$  = मदों की संख्या

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  = मद  $\times$  के विभिन्न मूल्य

#### समांतर माध्य के लाभ (Merits of Arithmetic Mean)

1 इसका परिकलन करना बहुत आसान है और यह आसानी से समझा जा सकता है।



हल—

प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

इस विधि के अन्तगत समांतर माध्य की गणना के लिए निम्नलिखित पदा को ध्यान में रखिये।

गणना के पद (Steps of Calculation)

- 1 प्रत्येक मदा या अवलोकन को 'x' का नाम दीजिए और उसे एक कालम में लिखत जाइए।
- 2 सभी मदा या अवलोकना के मूल्यों का योग कीजिए और उसे  $\Sigma x$  का नाम दीजिए।
- 3 मदा की कुल संख्या को N से सम्बोधित कीजिए।
- 4  $\Sigma x$  को N से भाग देकर समांतर माध्य को ज्ञात कीजिए।  
सूत्र इस प्रकार है—

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x}{N}$$

जहाँ  $\bar{X}$  = समांतर माध्य

$\Sigma x$  = मदों के मूल्यों का योग

N = मदों की संख्या

रोल नम्बर	अंक
	'२'
1	80
2	65
3	82
4	67
5	96
6	52
7	92
8	33
9	92
10	31
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="text-align: center;"> <math>N = 10</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math>\Sigma x = 690</math> </div> </div>	
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="text-align: center;"> <math>\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math>= \frac{690}{10}</math> </div> </div>	
$= 69$ अंक उत्तर	



2 श्रेणी के किसी मद या मूल्य को कल्पित समान्तर मान लिया जाता है।

3 इस कल्पित समान्तर माध्य को श्रेणी के प्रत्येक मद में से घटा कर उससे सामने इस विचलन को लिख दें। इसको  $d$  कहा जाता है। परन्तु घटाते समय (+) या (-) चिह्नो को ध्यान में रखना चाहिए। उदाहरण के लिए यदि कल्पित समान्तर माध्य श्रेणी में किसी मूल्य से अधिक है तो विचलन  $d'$  (-) में होगा और यदि यह कम है तो विचलन (+) में होगा।

4 तत्पश्चात् (+) व (-) का ध्यान रखते हुए विचलनो (Deviations) का जोड़ कर लीजिए और उसे  $\Sigma d$  कहिए।

5 सूत्र को अपनाइए और समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल—

मजदूरों की संख्या	साप्ताहिक मजदूरी रुपयों में ( $x$ )	कल्पित समान्तर माध्य = 20 से विचलन ( $d$ )
1	9	- 11
2	12	- 8
3	8	- 12
4	15	- 5
5	21	+ 1
6	28	+ 8
7	25	+ 5
8	16	- 4
9	14	- 6
10	22	+ 2
11	24	+ 4
12	18	- 2
13	20	0
14	26	+ 6
15	30	+ 10
<hr/>		<hr/>
$N = 15$		$\Sigma d = -12$

अब सूत्र को अपनाइए

$$x = a \pm \frac{\Sigma d}{N} = 20 - \frac{12}{15}$$



$$= 20 - \frac{4}{5} = \frac{96}{5}$$

$$= 19.20 \text{ रूपय उत्तर}$$

### विछिन्न श्रेणी या सामूहिक आकड़ों की अवस्था से समांतर माध्य गणना (Calculation of Arithmetic Mean of Discrete Series or Organised Data)

विछिन्न श्रेणी (Series) अथवा सामूहिक आकड़ों की अवस्था में मूलों के साथ आवृत्तियाँ (Frequencies) भी होती हैं। अतः प्रत्यक्ष विधि (Direct Method) के अनुसार समांतर माध्य प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$\text{सूत्र} \quad \bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

यहाँ  $f$  = विचल की आवृत्ति

$\sum fx$  = विचल और उनकी आवृत्तियों के गुणनफल का योग

$\sum f$  = कुल आवृत्तियों का योग

उदाहरण 3—निम्नलिखित आवृत्ति वितरण से प्रत्यक्ष विधि द्वारा माध्य की गणना कीजिए।

अंक 70 58 60 52 65 75 68

विद्यार्थियों की सं० 3 5 4 7 6 2 3

हल—

प्रत्यक्ष विधि द्वारा (Direct Method)

अंक	विद्यार्थियों की संख्या	विचलों और आवृत्तियों का गुणनफल
(x)	(f)	(fx)
70	3	210
58	5	290
60	4	240
52	7	364
65	6	390
75	2	150
68	3	204
	<hr/>	<hr/>
	$\sum f = 30$	$\sum fx = 1848$

अब सूत्र को अपनाइए

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum fr}{\sum f} \\ &= \frac{1848}{30} = \frac{616}{10} \\ &= 61.6 \text{ अथ } 61.6 \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

सधु विधि या अप्रत्यक्ष विधि (Short cut Method or Indirect Method)

इस विधि द्वारा समांतर माध्य का ज्ञात करने का सूत्र इस प्रकार है

$$\bar{x} = a + \frac{\sum fd}{\sum f}$$

जहाँ  $a$  = कल्पित समांतर माध्य

$\sum fd$  = आवृत्तियाँ और मूल विचलनों (Deviations) के गुणनफल का योग

$\sum f$  = कुल आवृत्तियाँ का जाड़

गणना के पद (Steps of Calculations)

1. जहाँ  $x$  व विद्यार्थियों की संख्या को आवृत्तियाँ ( $f$ ) मानिए।
2. कल्पित समांतर माध्य का प्रत्यक्ष मूल ( $x$  कालम) में से घटाइए और विचलन (Deviations) का  $d$  कहिए और (+) व (—) चिन्हों का ध्यान करके लिखते जाइए। यहाँ हमारी कल्पित समांतर माध्य 60 है।
3. प्रत्यक्ष मूल की आवृत्ति ( $f$  कालम) और विचलन ( $d$  कालम) को गुणा करके  $fd$  कालम में लिखिए। फिर इनका कुल योग करके  $\sum fd$  प्राप्त कीजिए।
4. ऊपर बताय गए सूत्र का प्रयोग करके समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या	कल्पित समांतर (60) माध्य से विचलन ( $x-a$ )	आवृत्ति और विचलनों का गुणनफल
( $x$ )	( $f$ )	( $d$ )	( $fd$ )
70	3	+10	+30
58	5	-2	-10
60	4	0	0
52	7	-8	-56
65	6	+5	+30
75	2	+15	+30
68	3	+8	+24
	$\sum f = 30$		$\sum fd = +48$

अब सूत्र को अपनाइए—

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a \pm \frac{\sum fd}{\sum f} \\ &= 60 + \frac{48}{30} \\ &= 60 + \frac{24}{15} = 60 + 1.6 = 61.6 \end{aligned}$$

अतः समांतर माध्य = 61.6 अंक उत्तर

पद विचलन विधि  
(Step Deviation Method)

उदाहरण 4—निम्नलिखित आवृत्ति वितरण से पद विचलन विधि द्वारा समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

अंक	10	15	20	25	30
विद्यार्थियों की संख्या	2	4	6	8	10

हल—इस विधि के द्वारा समांतर माध्य को पात करने का सूत्र इस प्रकार है

$$\bar{X} = a \pm \frac{\sum fd}{\sum f} \times c$$

जहाँ  $c$  = समापवतक (Common factor)

गणना के पद (Steps of Calculation)

- 1 मदी को 'x' बालम में और उनको आवृत्तियों को 'f' बालम में लिखिए।
- 2 किसी मदी को कल्पित समांतर माध्य (यहाँ हमने कल्पित माध्य 20 ली है) मानकर x से विचलन (Deviation) लीजिए और उसे 'd' कहिये।
- 3 'd' को समापवतक (Common factor) 'c' से भाग कीजिए और 'd' नाम दीजिए। यह पद विचलन है। यहाँ 'c' 5 के बराबर है।
- 4 आवृत्ति (f) और पद विचलन (d) का गुणनफल लेकर लिखते जाइए और उसे (fd) का नाम दीजिए।
- 5 अंत में सूत्र अपनाकर समांतर माध्य को ज्ञात कीजिए।

## उदाहरण का हल

अंक	विद्यार्थियों की संख्या	कल्पित स० मध्य से विचलन	पद विचलन	कुल विचलन
(x)	(f)	(d)	(d')	(f × d' = fd')
10	2	-10	-2	-4
15	4	-5	-1	-4
20	6	0	0	0
25	8	+5	1	8
30	10	+10	2	20
	<hr/>			<hr/>
	$\Sigma f = 30$			$\Sigma fd' = 20$

अब सूत्र को अपनाइए

$$\begin{aligned}\bar{X} &= a \pm \frac{\Sigma fd'}{\Sigma f} \times c \\ &= 20 + \frac{20}{30} \times 5 \\ &= 20 + \frac{10}{3} = 23 \frac{1}{3} \text{ अंक} \\ &= 23 \frac{1}{3} \text{ अंक उत्तर}\end{aligned}$$

अविच्छिन्न या वर्गांतर अथवा सत्या की अवस्था में समांतर माध्य का हल :  
(Calculation of Arithmetic Mean in Continuous Series) -

वर्गांतर अथवा सत्या में माध्य के परिवर्तन (Calculations) में अलग केवल यह है कि इसमें वर्गांतर (Class intervals) मध्य नुम्बरे (Mid-Values) को ज्ञात करके उनको  $x'$  माना जाता है। गणना के लिए यह विच्छिन्न अथवा सत्या की भांति ही है।

उदाहरण 5—निम्न आंकड़ों से समांतर माध्य का हल कीजिए

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
विद्यार्थियों की संख्या	5	10	40	20	5

हल	अव	मध्य मूल्य	विद्यार्थियों की संख्या	
	वर्गांतर	(x)	(f)	(fx)
	0-10	5	5	25
	10-20	15	10	150
	20-30	25	40	1000
	30-40	35	20	700
	40-50	45	25	1125
			$\Sigma f = 100$	$\Sigma fx = 3000$

अब सूत्र को अपनाइए

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{3000}{100} = 30 \text{ अंक}$$

उदाहरण 6—उपरोक्त उदाहरण 6 में दिये आँकड़ों से लघु विधि द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

लघु विधि द्वारा गणना (Calculation by Short cut Method)

इस विधि द्वारा समान्तर माध्य को ज्ञात करने के लिए सूत्र निम्नलिखित है

$$\bar{X} = a \pm \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$$

जहाँ a = कल्पित समान्तर माध्य

$\Sigma fd$  = आवृत्तियाँ और सगत विचलनों के गुणनफल का योग

$\Sigma f$  = कुल आवृत्तियों का योग

गणना के पद (Steps for Calculation)

1 वर्गान्तरों के मध्य मूल्य लीजिए और उनको x' तथा विद्यार्थियों की संख्या को f' मानिए।

2 किसी भी मध्य मूल्य (x) को कल्पित समांतर मान लीजिए।

3 कल्पित समांतर माध्य को (x) मंदो से घटाइये और विचलन को 'd' कहिए। जैसे  $x - a = d$

लिखते समय इनके आगे (+) या (-) के चिह्नों को पूरा ध्यान दीजिए।

4 प्रत्येक मद की आवृत्ति और विचलन को गुणा करके 'fd' वाले कालम में लिखते जाइये। इनके गुणनफल के योग को  $\Sigma fd$  कहेंगे।

5 आवृत्तियों को जोड़कर  $\Sigma f$  प्राप्त कीजिए।

6 सूत्र का अपना कर समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 7 — तपु विधि द्वारा निम्न आँकड़ों से समांतर माध्य ज्ञात कीजिए

अंक	0 10	10-20	20 30	30-40	40 50
विद्यार्थियों की संख्या	5	10	40	20	25

हल इस प्रश्न को हल करने के लिए ऊपर दिये गये गणना के पदों की सहायता लीजिए जैसा कि नीचे हल करके दिखाया गया है।

अंक वर्गांतर	माध्य मूल्य (x)	कल्पित समांतर माध्य 25 से विचलन (x-a) (d)	विद्यार्थियों की संख्या (f)	कूल विचलन (fd)
0-10	5	- 20	5	- 100
10-20	15	- 10	10	100
20-30	25	0	40	0
30-40	35	10	20	200
40-50	45	20	25	500
			$\Sigma f = 100$	$\Sigma fd = 500$

अब सूत्र को अपनाइए

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a \pm \frac{\Sigma fd}{\Sigma f} \\ &= 25 + \frac{500}{100} = 25 + 5 = 30 \\ &= 30 \text{ अंक उत्तर} \end{aligned}$$

पद विचलन विधि (Step Deviation Method)

इस विधि के द्वारा समांतर माध्य ज्ञात करने के लिए गणना के पद तपु विधि की भाँति ही हैं

परन्तु यहाँ  $d' = \frac{x-a}{i}$

और  $i =$  वर्ग विस्तार

समांतर माध्य ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित है

$$\bar{x} = a \pm \frac{\sum fd'}{\sum f}$$

जहाँ (पद विचलन)  $d' = \frac{x-a}{1}$

उदाहरण 7 का पद विचलन विधि द्वारा हल

अ क वर्गान्तर	माध्य मूल्य (x)	विद्यार्थियों की संख्या (f)	विचलन कल्पित माध्य $d = x - A$ $A = 25$ (d)	पद विचलन कल्पित $\frac{x-a}{1}$ $a = 25$ (d')	कुल विचलन fd'
0-10	5	5	-20	-2	-10
10-20	15	10	-10	-1	-10
20-30	25	40	0	0	0
30-40	35	20	+10	1	20
40-50	45	25	+20	2	50
		$\sum f = 100$			$\sum fd' = 50$

अब सूत्र अपनाइये

$$\bar{x} = a \pm \frac{\sum fd'}{\sum f} \times 1$$

$$= 25 + \frac{50}{100} \times 10$$

$$= 25 + 5 = 30 \text{ अब उत्तर}$$

सचयी आवृत्तियों से समांतर माध्य का परिकलन (Calculation of arithmetic mean when cumulative frequencies are given)

उदाहरण 8 सांख्यिकी के परीक्षण में 90 विद्यार्थियों ने निम्नलिखित अंक प्राप्त किये। समांतर माध्य की गणना कीजिए।

अंक	0	10	20	30	40	50	60
अब इतने से अधिक	90	86	76	56	21	6	0
थमों की संख्या							

हल

गणना के पद (Steps for Calculation)

1 ऊपर दिए गए वितरण में अंक की आवृत्तियाँ सचयी रूप में दी गई हैं अतः सबसे पहले इन्हें सामान्य वर्गांतर श्रृंखला में बदल लीजिए।

2 इस वितरण में 0 अंको से अधिक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी 90 हैं किन्तु 10 अंक से अधिक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 86 है। इसलिए 0-10 अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 4 है। इसी प्रकार 10-20 अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 10 होगी। इस प्रकार हम एक साधारण आवृत्ति वितरण बना लेते हैं जैसा कि नीचे बना कर दिखाया गया है।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0-10	4
10-20	10
20-30	20
30-40	35
40-50	15
50-60	6

3 अब उपरोक्त वितरण का उदाहरण 9 की भाँति हल कीजिए जैसा कि नीचे हल किया गया है।

अंक	मध्य मूल्य	विद्यार्थियों की संख्या	(कल्पित समांतर माध्य=35)	पद विचलन	कुल विचलन
	(x)	(f)	(d)	(d')	(fd')
0-10	5	4	-30	-3	-12
10-20	15	10	-20	-2	-20
20-30	25	20	-10	-1	-20
30-40	35	35	0	0	0
40-50	45	15	+10	+1	+15
50-60	55	6	+20	+2	+12
		$\Sigma f = 90$			



अब सूत्र अपनाइये

$$\begin{aligned}\bar{X} &= a \pm \frac{\sum fd'}{\sum f} \times i \\ &= 35 - \frac{25}{90} \times 10 \\ &= 35 - \frac{25}{9} = 35 - 2.8 \\ &= 32.2 \text{ अंक उत्तर}\end{aligned}$$

विवृतमुखी श्रृंखला में समान्तर माध्य की गणना (Calculation of Arithmetic mean in Open end Series)

विवृतमुखी श्रृंखला (Open end Series) वह श्रृंखला होती है जिसमें प्रथम वर्ग की निम्न सीमा (Lower Limit) और अंतिम वर्ग की उच्च सीमा नहीं दी हुई होती।

उदाहरण 9 निम्न आँकड़ों से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

मासिक आय ₹० में	पुरुषों की संख्या
50 से कम	35
50-60	24
60-70	21
70-80	18
80-90	6
90 से अधिक	3

हल—

विवृतमुखी श्रृंखला में हम देखते हैं कि पहले और अंतिम वर्ग को छोड़ कर अन्य सभी वर्गों में अन्तर बराबर दिया गया है। यह अन्तर 10 का है। इससे हम यह मान लेते हैं कि जब अन्य सभी वर्गों का अन्तर 10 है तो पहले और अंतिम वर्ग का अन्तर ही 10 होगा। अब इस मायता के आधार पर हमारा वितरण अब इस प्रकार होगा

मासिक आय (₹० में)	पुरुषों की संख्या
40-50	35
50-60	24
60-70	21
70-80	18
80-90	6
90-100	3

अब उपरोक्त वितरण से समांतर माध्य की गणना उदाहरण 9 के अनुसार हो सकती है। जैसे—

मासिक आय ₹० में	मध्य मूल्य	पुरुषों की संख्या	व्यक्ति समांतर=65	पर विचलन	कुल विचलन
वर्गान्तर	(x)	(f)	(d)	d'	fd'
40- 50	45	35	-20	-2	-70
50- 60	55	24	-10	-1	-24
60- 70	65	21	0	0	0
70- 80	75	18	+10	+1	+18
80- 90	85	6	+20	+2	+12
90-100	95	3	+30	+3	+9
		$\Sigma f = 107$			$\Sigma fd' = -55$

अब सूत्र बनाइए

$$\begin{aligned}\bar{X} &= a \pm \frac{\Sigma fd}{\Sigma f} \times i \\ &= 65 - \frac{55}{107} \times 10 = 65 - 5.14 \\ &= 59.86 \quad \text{उत्तर}\end{aligned}$$

### भारित समांतर माध्य (Weighted Arithmetic Mean)

सरल समान्तर माध्य की गणना करते समय सभी मदों या वस्तुओं को एक-सा महत्व दिया जाता है परंतु वास्तविक जीवन में हम सभी मदों को एक-सा महत्व नहीं देते। कुछ मदें जो अधिक आवश्यक समझी जाती हैं उन्हें अधिक महत्व या भार (weight) दिया जाता है और शेष को कम भार दिया जाता है। इस प्रकार जब मदों का भार एक-सा नहीं होता तो प्रत्येक मद को उसके सापेक्षिक भार से जोड़ दिया जाता है। अतः भारित माध्य की गणना करते समय प्रत्येक मद को उसके सापेक्षिक भार से गुणा कर दिया जाता है। इन गुणनफलों का योग कर लिया जाता है। इस योग को भारों की कुल संख्या से भाग दे दिया जाता है। उदाहरण के लिए मान लीजिए कि

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$	मदों की संख्या है और
$W_1, W_2, W_3, \dots, W_n$	उनके सम्प्रक्षिप्त भार हैं तब

भारित माध्य (Weighted Mean) or

$$\bar{X}_w = \frac{X_1W_1 + X_2W_2 + X_3W_3 + \dots + X_nW_n}{W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n}$$

$$= \frac{\sum XW}{\sum W}$$

जहाँ  $\bar{X}_w$  = भारित माध्य

$\sum wx$  = चलो और उनके भारो (W) के गुणनफलो का योग

$\sum W$  = भारो का योग

उदाहरण 10 — एक परीक्षा में एक विद्यार्थी ने 100 में से निम्नलिखित अंक प्राप्त किये

अंग्रेजी 55, गणित 70, भौतिक 65 और रसायन शास्त्र 55। यदि विषयों के लिए क्रमशः भार 2, 3, 2, 1 नियत किए गये हों तो भारित समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल—

गणना के पद (Steps of Calculation)

- 1 अंको को 'x' और भारो को (w) मान लीजिए।
- 2 अंको (x) और भारो (w) को गुणा कर लीजिए और इनके गुणनफलो के योग को  $\sum xw$  कहिए।
- 3 भारो का योग कीजिए और उसे  $\sum w$  कहिए।
- 4 उपरोक्त सूत्र को अपनाइये और भारित समान्तर माध्य को ज्ञात कीजिए।

विषय	अंक (x)	भार (w)	गुणनफल (xw)
अंग्रेजी	55	2	110
गणित	70	3	210
भौतिक	65	2	130
रसायन शास्त्र	60	1	60
		$\sum w = 8$	$\sum xw = 510$

सूत्र  $\bar{X}_w = \frac{\sum xw}{\sum w} = \frac{510}{8} = 63.75$  अंक उत्तर

12 अशोक ने दिल्ली बोर्ड की परीक्षा में निम्नलिखित अंक प्राप्त किये

अंग्रेजी में 50 प्रतिशत, गणित में 75 प्रतिशत, हिंदी में 60 प्रतिशत, भौतिकी में 70 प्रतिशत और रसायन शास्त्र में 65 प्रतिशत। यदि विषयों को क्रमशः 1, 2, 1, 3, 3 भार दिये गए हों तो भारित समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल—

विषय	अंक (x)	भार (w)	गुणनफल (xw)
अंग्रेजी	50	1	50
गणित	75	2	150
हिंदी	60	1	60
भौतिकी	70	3	210
रसायन शास्त्र	65	3	195
		$\Sigma w = 10$	$\Sigma xw = 665$

सूत्र को अपनाइए

$$\bar{X}_w = \frac{\Sigma xw}{\Sigma w} = \frac{665}{10} = 66.5 \text{ अंक उत्तर}$$

भारित समांतर माध्य के प्रयोग (Uses of Weighted Arithmetic Mean)

भारित समान्तर माध्य के निम्नलिखित विशेष प्रयोग हैं

1. भारित समांतर माध्य सूचकांक (Index numbers) बनाने में प्रयोग किया जाता है।

2. यह दो या दो से अधिक बोरों या विश्वविद्यालयों के परिणामों की तुलना करने में प्रयोग होता है।

3. यह सामान्य (General) तथा प्रमाणित (Standardized) जन्म दर और मूल्य दर, आदि की गणना तथा विभिन्न स्थानों व समयों में इनकी तुलना करने में प्रयोग किया जाता है।

4. अनुपात, प्रतिशत और दरा का माध्य निकालते समय भी इसका प्रयोग किया जाता है।

सामूहिक समांतर माध्य की गणना (Calculation of Combined Arithmetic Mean)

हम दो सम्बंधित समूहों (Groups) का सामूहिक समांतर माध्य (Combined arithmetic mean) भी निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

$$\bar{X}_1 = \frac{\bar{X}_1 N_1 + \bar{X}_2 N_2}{N_1 + N_2}$$

जहाँ $\bar{X}_{1, 2}$	= दो समूहों का सामूहिक समान्तर माध्य
$\bar{X}_1$	= पहले समूह का समान्तर माध्य
$\bar{X}_2$	= दूसरे समूह का समान्तर माध्य
$N_1$	= पहले समूह की मदों की संख्या
$N_2$	= दूसरे समूह की मदों की संख्या

हम उपरोक्त सूत्र को बढ़ाकर दो से अधिक समूहों का सामूहिक समान्तर माध्य भी ज्ञात कर सकते हैं।

सूत्र इस प्रकार है

$$\bar{X}_{1, 2, 3, \dots, n} = \frac{\bar{X}_1 N_1 + \bar{X}_2 N_2 + \bar{X}_3 N_3 + \dots + \bar{X}_n N_n}{N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_n}$$

उदाहरण 12 समूह 'क' के 45 विद्यार्थियों के औसत अंक 35 हैं और समूह 'ख' के 55 विद्यार्थियों के औसत अंक 40 हैं। दोनों समूहों के 100 विद्यार्थियों के सामूहिक औसत अंक ज्ञात कीजिए

हल

समूह 'क' के विद्यार्थियों के औसत अंक  $(\bar{X}_1) = 35$

समूह 'ख' के विद्यार्थियों के औसत अंक  $(\bar{X}_2) = 40$

समूह 'क' में विद्यार्थियों की संख्या  $(N_1) = 45$

समूह 'ख' में विद्यार्थियों की संख्या  $(N_2) = 55$

निम्न सूत्र को अपना कर सामूहिक समान्तर माध्य का ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \bar{X}_{1, 2} &= \frac{\bar{X}_1 N_1 + \bar{X}_2 N_2}{N_1 + N_2} \\ &= \frac{35 \times 45 + 40 \times 55}{45 + 55} \\ &= \frac{3775}{100} = 37.75 \text{ अंक} \end{aligned}$$

**मध्यका (Median)**

मध्यका एक प्रकार की नई माध्य है जो माध्य के अवगुणों जैसे चरम सीमाओं से अधिक प्रभावित होना है, अवास्तविक निष्कर्ष आदि को दूर करती है और वितरण को उचित रूप से व्यक्त करती है। माध्यका एक क्रमबद्ध वितरण या श्रृंखला को दो बराबर भागों में बाँटती है।

सांकेतिक रूप से (Symbolically)

$$M = \text{मद का } \left( \frac{n+1}{2} \right) \text{ वा आकार}$$

जहाँ  $M$  = मध्यका  $N$  = मदों की संख्या

### मध्यका के लाभ (Merits of Median)

- 1 यह चरम सीमाओं से प्रभावित नहीं होती ।
- 2 यदि कुछ मंदो का ज्ञान न भी हो तो भी मध्यका को ज्ञात किया जा सकता है ।
- 3 इसका परिकलन (Calculate) करना तथा इसको समझना बहुत आसान है ।
- 4 खुले सिर वाले आवृत्ति वितरण (Open end frequency distributions) में भी इसको आसानी से ज्ञात किया जा सकता है क्योंकि इसमें प्रथम वग की निम्नतम सीमा और अन्तिम वर्ग की उच्चतम सीमा को निश्चित करने की आवश्यकता नहीं होती ।
- 5 रेखा द्वारा भी इसके मूल्य को ज्ञात किया जा सकता है ।
- 6 जब आकड़ों का मात्रात्मक (Quantitative) माप नहीं किया जा सकता जैसे ईमानदारी, योग्यता आदि तो माध्यका अधिक उपयुक्त होती है ।
- 7 यह एक निश्चित माध्य है ।

### मध्यका की हानियाँ (Demerits of Median)

- 1 इसका सबसे बड़ा दोष यह है कि इसका प्रयोग बीजगणितीय क्रियाओं में नहीं किया जा सकता ।
- 2 इसको ज्ञात करने से पहले मंदो को क्रमबद्ध (Array) करना पड़ता है अतः समय अधिक लगता है । जब मंदो की संख्या बहुत बड़ी हो तो कठिनाई अधिक होती है ।
- 3 यह उन परिस्थितियों में लाभदायक नहीं होती जहाँ सीमांत मंदो को अधिक महत्व देना होता है क्योंकि इसमें सभी आवृत्तियों को समान माना जाता है ।
- 4 इसका ज्ञात करते समय श्रेणी की सभी मंदो को एक सामान्य महत्व दिया जाता है । वास्तव में यह टीका नहीं ।
- 5 जब मंदों परमाणु में बहुत अधिक विचरण करती हैं तो यह श्रेणी को निरूपित नहीं करती ।
- 6 यदि मंदो की संख्या कम हो तो यह अनिश्चित होगी ।

### मध्यका की गणना (Calculation of Median)

असमूहिक आँकड़ों या व्यक्तिगत श्रृंखलाएँ (Unorganised data or Individual series)

मध्यका ज्ञात करने से पहले आँकड़ों को बढ़ते या गिरते क्रम (Ascending or Descending order) में लिख लीजिए । फिर मध्यका संख्या को प्राप्त के लिए सूत्र की सहायता लीजिए ।

सूत्र इस प्रकार है

$$\text{मध्यका} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ वा मद का आकार}$$

जहाँ  $N =$  मदों की संख्या

उदाहरण 13 निम्नलिखित मदों की मध्यका ज्ञात करो।

2 4, 8, 10 12, 15 20, 25 30

हल —

गणना के पद (Steps of Calculation)

1 मदों को 'x' मान लीजिए और उन्हें बढ़ते या गिरते क्रम से लिख लीजिए।

2 मध्यका संख्या को ज्ञात करने के सूत्र अपनाइए और मध्यका को ज्ञात कीजिए जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

क्रम संख्या	मदें (बढ़ते क्रम से)
	(x)
1	2
2	4
3	8
4	10
5	12
6	15
7	20
8	25
9	30

$$\text{मध्यका (M)} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ वा मद का आकार}$$

$$= \frac{9+1}{2} \text{ वा 5वा मद का आकार}$$

$$= 12 \text{ उत्तर}$$

नोट — उपरोक्त उदाहरण में मदों की मात्रा विषम (Odd) है। जब मदों की मात्रा विषम होती है तो मध्यका संख्या आसानी से पाई जा सकती है परंतु जब मदों की संख्या युग्म (Even) होती है तो मध्यका संख्या दो संख्याओं के बीच आती है। ऐसी स्थिति में उन दो मदों की संख्याओं के योग को 2 पर भाग देकर मध्यका प्राप्त की जाती है। जैसा कि नीचे उदाहरण 14 में दिखाया गया है।

उदाहरण 14 निम्न आवडो के लिए मध्यका ज्ञात करो।

2, 4, 10, 8 15 20 12 25 30, 38

हल—

क्रम सख्या	मर्दें (बढ़ते क्रम से) (x)
1	2
2	4
3	8
4	10
5	12
6	15
7	20'
8	25
9	30
10	38

मध्यका (M) =  $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ मद का आकार

$$= \frac{10+1}{2} \text{ वा 5.5 वा मद का आकार}$$

$$5.5 \text{ वा मद का आकार} = \frac{5 \text{ वी मद} + 6 \text{ वी मद}}{2}$$

$$= \frac{12 + 15}{2} = 13.5$$

अतः मध्यका = 13.5 उत्तर

विच्छिन्न श्रृंखला में मध्यका की गणना (Calculation of Median in Discrete Series)

हम ऊपर पत्र चुने हैं कि विच्छिन्न श्रृंखला में मर्दों के साथ उनकी आवृत्तिया भी दी हुई होती हैं। ऐसी श्रृंखलाओं में मर्दों को 'x' और उनकी आवृत्तियों को 'f' माना जाता है और मध्यका ज्ञात करने के लिए संचयी (Cumulative) आवृत्तिया का प्रयोग किया जाता है। सबसे पहला मध्यका सख्या (Median item) का ज्ञान किया जाता है और फिर मध्यका के सूत्र का  $\frac{n+1}{2}$  के सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।  $n'$  आवृत्तियों के योग को प्रदर्शित करता है न कि मर्दों की सख्या को। निम्न उदाहरण विच्छिन्न श्रृंखला में मध्यका ज्ञात करने की विधि का प्रदर्शित करते हैं।



उदाहरण 16—निम्न आवृत्तियों से मध्यका मूल्य ज्ञात कीजिए।

x	5,	10,	15	20,	25
f	2,	4,	6	8,	10

हल

मर्के (x)	आवृत्ति (f)	संघट्टी आवृत्तियाँ (c f)
5	2	2
10	4	6
15	6	12
20	8	20
25	10	30

यहाँ N=30

$$\begin{aligned} \text{मध्यका} &= \left[ \frac{n+1}{2} \right] \text{वा मर्के का आकार} \\ &= \left[ \frac{30+1}{2} \right] \text{वा मर्के का आकार} \end{aligned}$$

अर्थात् 15<sup>वाँ</sup> मर्के

यहाँ 15<sup>वाँ</sup> मर्के का मूल्य 20 है

अतः मध्यका = 20 है। उत्तर

उदाहरण 16—निम्नलिखित आवृत्तियों के लिए मध्यका की गणना कीजिए।

ऊँचाई (सें० मी० में)	120	121	122	123	124	125
विद्यार्थियों की संख्या	8	12	17	14	13	6

हल—

ऊँचाई (सें० मी०)	विद्यार्थियों की संख्या (f)	संघट्टी आवृत्तियाँ (c f)
(x)		
120	8	8
121	12	20
122	17	37
123	14	51
124	13	64
125	6	70

यहाँ n=70

$$\begin{aligned} \text{मध्यका} &= \left[ \frac{n+1}{2} \right] \text{वा मद का आकार} \\ &= \left[ \frac{70+1}{2} \right] \text{वा मद का आकार} \end{aligned}$$

अर्थात् 35 5वीं मद का आकार

यहाँ मध्यका 35 5वीं सख्या है और 35 5 वीं सख्या का मूल्य 122 है।  
अतः मध्यका का मूल्य 122 सं० भी० है - उत्तर

**अविच्छिन्न श्रृंखला में मध्यका गणना (Calculation of median in Continuous Series)**

अविच्छिन्न श्रृंखला में मध्यका का ज्ञात करने के लिए  $\left[ \frac{n+1}{2} \right]$  के स्थान पर  $\left( \frac{n}{2} \right)$  का प्रयोग किया जाता है अतः मध्यका =  $\left( \frac{n}{2} \right)$  वां मद का आकार। मध्यका को ज्ञात करने के लिए शेष गणना पद पहले जैसे ही हैं जैसा कि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया गया है

**उदाहरण 17—निम्नलिखित आवृत्ति वितरण के लिए मध्यका की गणना कीजिए**

बक	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
विद्यार्थियों की सख्या	10	20	30	35	51

**हल—**

**गणना के पद (Steps for Calculation)**

- 1 'x' कालम में वर्गों तर लिखिए और 'f' कालम में विद्यार्थियों की सख्या (आवृत्तियाँ) लिखिए।
- 2 सचयी आवृत्तियों को (c f) कालम में लिखिए।
- 3 मध्यका सख्या ज्ञात करने के लिए  $\left( \frac{n}{2} \right)$  का प्रयोग कीजिए।
- 4 मध्यका वाले वर्ग को ज्ञात कीजिए।
- 5 निम्न सूत्र द्वारा मध्यका को ज्ञात कीजिए

$$\text{मध्यका (M)} = l_1 + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} (l_2 - l_1)$$

जहाँ  $\left( \frac{N}{2} \right)$  = मध्य मद

$l_1$  = मध्यका वग की निम्न सीमा  
 $l_2$  = मध्यका वग की उच्च सीमा  
 $f$  = मध्यका वग की आवृत्ति  
 $c$  = मध्यका वग से पहले वग की सचयी आवृत्ति

अ क वग वग विद्यार्थियों की सख्या (आवृत्ति)

सचयी आवृत्तियाँ

अ क वग	वग विद्यार्थियों की सख्या (आवृत्ति)	सचयी आवृत्तियाँ (cf)
	(f)	10
0-5	10	30
5-10	20	60
10-15	30	95
15-20	35	146
20-25	51	यहाँ N=146

मध्यका (M) =  $\left(\frac{N}{2}\right)$  वा मद का आकार  
 =  $\frac{146}{2}$  वा मद का आकार  
 = 73 वा मद का आकार  
 अतः मध्यका 15-20 के वग में स्थित है।

अब सूत्र को अपनाइये

$$\begin{aligned}
 \text{मध्यका (M)} &= l_1 + \frac{\frac{N}{2} - c}{f} (l_2 - l_1) \\
 &= 15 + \frac{73 - 60}{35} (20 - 15) \\
 &= 15 + \frac{13}{35} \times 5 = 15 + \frac{13}{7} \\
 &= 15 + 1.86 = 16.86 \\
 &= 17 \text{ अक उत्तर}
 \end{aligned}$$

उदाहरण 18 निम्नलिखित आवृत्ति वितरण के लिए मध्यका की गणना की

अ क	वग	आवृत्ति	अ क	वग	आवृत्ति
	0-10	6		20-30	4
	10-20	7		30-40	12
	20-30	10		40-50	6
	30-40	15		50-60	7
	40-50	20		60-70	10
	50-60	25		70-80	4
	60-70	30		80-90	5
	70-80	35		90-100	2

हल—

अ क वर्ग	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्तियाँ (c f)
0-10	6	6
10-20	7	13
20-30	4	17
30-40	12	29
40-50	6	35
50-60	7	42
60-70	10	52
70-80	4	56
80-90	5	61
90-100	2	63

यहाँ  $N=63$ 

$$\begin{aligned} \text{मध्यका (M)} &= \left( \frac{N}{2} \right) \text{ वाँ मद का आकार} \\ &= \frac{63}{2} \text{ या } 31.5 \text{ वाँ मद का आकार} \end{aligned}$$

अतः मध्यका 40-50 के वर्ग में स्थित है। अब सूत्र को अपनाइए

$$\begin{aligned} \text{मध्यका (M)} &= l_1 + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} (l_2 - l_1) \\ &= 40 + \frac{31.5 - 29}{6} (50 - 40) \\ &= 40 + \frac{2.5}{6} \times 10 = 40 + 0.41 \\ &= 40.41 \text{ अथवा उत्तर} \end{aligned}$$

उदाहरण 20—निम्नलिखित आवृत्ति वितरण के लिए मध्यका ज्ञात कीजिए।

चल मूल्य	60 से ऊपर	50-60	40-50	30-40	20-30	10-20	0-10
आवृत्ति	6	12	10	2	20	24	4

हल—

उपरोक्त उदाहरण में आवृत्ति वितरण गिरते क्रम में दिखाया गया जब आवृत्ति वितरण गिरते क्रम (Descending order) से दिया गया हो।

$$\text{मध्यका (M)} = l_2 - \frac{\frac{N}{2} - c}{f} (l_2 - l_1)$$

बत मूल्य	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्तियाँ (c.f)
60 से ऊपर	6	6
50-60	12	18
40-50	10	28
30-40	2	30
20-30	20	50
10-20	24	74
0-10	4	78

यहाँ  $N=78$

$$\begin{aligned} \text{मध्यका (M)} &= \left( \frac{N}{2} \right) \text{ वीं मद का आकार} \\ &= \frac{78}{2} = 39 \text{ वीं मद का आकार} \end{aligned}$$

बत मध्यका 20-30 के वर्ग में स्थित है।

अब उपरोक्त सूत्र को अपनाएँ

$$\begin{aligned} \text{मध्यका (M)} &= l_2 - \frac{\frac{N}{2} - c}{f} (l_2 - l_1) \\ &= 30 - \frac{39 - 30}{20} (30 - 20) \\ &= 30 - \frac{9}{20} \times 10 = 30 - 4.5 \\ &= 25.5 \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

**बिन्दुरेखीय पद्धति द्वारा मध्यका का निर्धारण (Location of Median Graphically)**

हम मध्यका का मूल्य बिन्दुरेखीय पद्धति द्वारा भी ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 20—निम्न आकड़ों से बिन्दुरेखीय पद्धति द्वारा मध्यका का मूल्य ज्ञात कीजिए

अब	0-10	20	20-30	30-40	40-50	50-60
बिधाधियों की संख्या		10	20	35	15	6

हल—

पद (Steps of Solution)

- (1) एक 'इतने से कम' की सचयी सारणी बनाइए।
- (2) एक 'इतने से कम' (Less than) की सचयी वक्र या ओगिव वक्र बनाइये।
- (3) अको का  $x$ -अक्ष पर और आवृत्तियों को  $y$ -अक्ष पर लिजिए।
- (4)  $\frac{N}{2}$  वा मूल्य ज्ञात कीजिए और  $y$ -अक्ष पर इसे ज्ञात कीजिए।  
(यह मूल्य 45 है)
- (5) इस बिन्दु से  $y$ -अक्ष पर एक लम्ब (Perpendicular) गिराइये और इसे बढ़ाइय ताकि यह ओगिव वक्र को मिल सके।
- (6) जिस बिन्दु पर यह लम्ब ओगिव वक्र को मिलता है वहाँ से एक लम्ब  $y$ -अक्ष पर डालिये। इस लम्ब के स्पर्श बिन्दु का मूल्य पढ़ लीजिए। वही मध्यका मूल्य होगा। (मध्यका का मूल्य = 33.14 रेखाचित्र को देखिए)

सचयी आवृत्ति सारणी (Cumulative Frequency Table)

अंक 'से कम' (Less than)	विद्यार्थियों की संख्या (संचयी आवृत्ति)
10	4
20	14
30	34
40	69
50	84
60	90

$$\text{यहाँ } N = 90$$

$$\text{और } \frac{N}{2} \text{ वा मूल्य } = \frac{90}{2} = 45$$

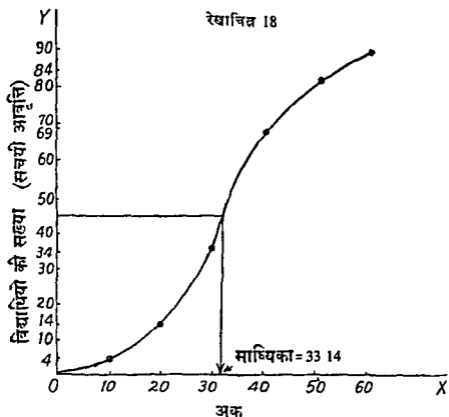
$$\text{मध्यका का मूल्य } = 33.14$$

बिन्दु रेखा द्वारा प्रदर्शन

विभाजन मूल्य (Partition value),

मध्यका एक वितरण या श्रृंखला को दो बराबर भागों में बाँटती है। इस प्रकार चतुर्थांक (Quartile) इसको चार भागों में बाँटता है। पहले चतुर्थांक और तीसरे चतुर्थांक को  $Q_1$  से प्रदर्शित किया जाता है। दूसरा चतुर्थांक

रेखाचित्र 18



है और चौथा चतुर्थक मदा की अंतिम सीमा होती है। इसलिए उनके अध्ययन की आवश्यकता नहीं होती। अतः हमें  $Q_1$  और  $Q_3$  का ही अध्ययन करना है।

इसी प्रकार दशमल्व (Decile) एक वितरण या श्रृंखला को दस भागों और शतमक (Percentile) इसका सौ भागों में बाँटता है। दशमक को D से आरंभ शतमक को P में प्रदर्शित किया जाता है।

चतुर्थक दशमक और शतमक को ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र दिए गए हैं

व्यक्तिगत और विच्छिन्न श्रृंखला (Individual and Discrete Series)

$$Q_1 = \left[ \frac{N + 1}{4} \right] \text{ वा मदा का आकार}$$

$$Q_3 = \left[ \frac{3(N + 1)}{4} \right] \text{ वा मदा का आकार}$$

$$D_5 = \left[ \frac{5(N + 1)}{10} \right] \text{ वा मदा का आकार}$$

$$D = \left[ \frac{7(N+1)}{10} \right] \text{ वा मद का आकार}$$

$$P_{30} = \left[ \frac{30(N+1)}{100} \right] \text{ वा मद का आकार}$$

उदाहरण 21—निम्नलिखित आकड़ों से मध्यका, प्रथम व तृतीय चतुर्थक, छठा दशमक और चालीसवाँ शतमक ज्ञात कीजिए।

10 विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्त अंक

32, 12, 30, 18, 11, 41, 35, 26, 22, 14,

हल—

पहले दिये गये आकड़ों को बढ़ते (या आरोही) क्रम में लिखिए।

क्रम संख्या	अंक
1	11
2	12
3	14
4	18
5	22
6	26
7	30
8	32
9	35
10	41

$$\text{मध्यका (M)} = \left( \frac{N+1}{2} \right) \text{ वा मद का आकार}$$

$$= \frac{11}{2} = 5.5 \text{ वा मद का आकार}$$

$$5.5 \text{ वा मद का आकार} = \frac{5 \text{ वी मद} + 6 \text{ वी मद}}{2}$$

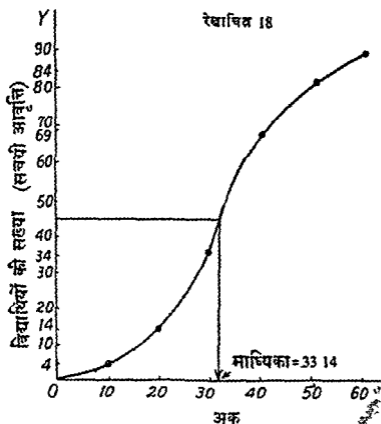
$$= \frac{22 + 26}{2} = 24 \text{ अंक}$$

$$Q_1 = \left( \frac{N+1}{4} \right) \text{ वा मद का आकार}$$

$$= \frac{10 + 1}{4} = \frac{11}{4} = 2.75 \text{ वा मद का आकार}$$



रेखाचित्र 18



है और चौथा चतुर्थक मंदो की अंतिम सीमा होती है। इसी आवश्यकता नहीं होती। अतः हम  $Q_1$  और  $Q_3$  का ही अध्ययन

इसी प्रकार दशमलव (Decile) एक वितरण या और शतमक (Percentile) इनको सौ भागों में बाँटता शतमक को P से प्रदर्शित किया जाता है।

चतुर्थक शतमक और शतमक को ज्ञात कर गए हैं

व्यक्तिगत और विशिष्टन शृंखला

$$Q_1 = \left[ \frac{N+1}{4} \right] \text{वाँ मंद}$$

$$Q_3 = \left[ \frac{3(N+1)}{4} \right]$$

$$D_5 = \left[ \frac{5(N+1)}{10} \right]$$

अविच्छिन्न अथवा वर्गान्तर वितरण (Continuous or class interval series)

अविच्छिन्न या वर्गान्तर वितरण में  $Q_1$ ,  $Q_3$ ,  $D_8$  एवं  $P_{70}$  ज्ञात करने के लिए सूत्र निम्नलिखित हैं

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - c}{f} (l_2 - l_1)$$

$$Q_3 = l_1 + \frac{\frac{3N}{4} - c}{f} (l_2 - l_1)$$

$$D_8 = l_1 + \frac{\frac{6N}{10} - c}{f} (l_2 - l_1)$$

$$P_{70} = l_1 + \frac{\frac{70N}{100} - c}{f} (l_2 - l_1)$$

उदाहरण 22—निम्नलिखित आकड़ों से दोर्ग चतुर्षक, छठा दशमक और सप्तमक घातमक के मूल्य ज्ञात कीजिए।

वर्ष	22-26	26-30	30-34	34-38	38-42
आवृत्ति	6	7	4	2	1

हल—

वर्ष	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्तिया (c f)
22-26	6	6
26-30	7	13
30-34	4	17
34-38	2	19
38-42	1	20

यहाँ  $N=20$

$$Q_1 = \frac{N}{4} \text{ वां मक का आकार}$$

$$= \frac{20}{4} \text{ या 5वां मक का आकार}$$

अतः  $Q_1$ , 22-26 के वर्ग में स्थित है

2.75 वा मद् का आकार = 2nd मद् + 0.75 (3rd मद् का आकार — 2nd मद् का आकार)

$$\begin{aligned}
 &= 12 + 0.75 (14 - 12) \\
 &= 12 + 0.75 \times 2 \\
 &= 12 + 1.50 = 13.50 \text{ अक उत्तर}
 \end{aligned}$$

$Q_3 = \left[ \frac{3(N+1)}{4} \right]$  वा मद् का आकार

$$= \frac{33}{4} = 8.25 \text{ वा मद् का आकार}$$

8.25 वा मद् का आकार = 8 वीं मद् + 0.25

(9 वीं मद् का आकार — 8 वीं मद् का आकार)

$$\begin{aligned}
 &= 32 + 0.25 (35 - 32) \\
 &= 32 + 0.25 \times 3 = 32 + 0.75
 \end{aligned}$$

32.75 अक उत्तर

$D_4 = \frac{6(N+1)}{10}$  वा मद् का आकार

$$= \frac{66}{10} = 6.60 \text{ वा मद् का आकार}$$

6.60 वा मद् का आकार = 6 वीं मद् + 0.60

(7 वीं मद् का आकार — 6 वीं मद् का आकार)

$$\begin{aligned}
 &= 26 + 0.60 (30 - 26) \\
 &= 26 + 0.60 \times 4 = 26 + 2.40
 \end{aligned}$$

28.40 अक उत्तर

$P_{44} = \frac{40(n+1)}{100}$  वा मद् का आकार

$$= \frac{40 \times 11}{100} \text{ वा मद् का आकार अथवा } 4.40 \text{ वा मद्}$$

4.40 वा मद् का आकार = 4th मद् + 0.40

(5 वीं मद् का आकार — 4 वीं मद् का आकार)

$$= 18 + 0.40 (22 - 18)$$

$$= 18 + 0.40 \times 4 = 18 + 1.60$$

19.60 अक उत्तर

अविच्छिन्न अथवा वर्गन्तर वितरण (Continuous or class interval series)

अविच्छिन्न या वर्गन्तर वितरण में  $Q_1$ ,  $Q_3$ ,  $D_8$  एवं  $P_{70}$  ज्ञात करने के लिए सूत्र निम्नलिखित हैं

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - c}{f} (l_2 - l_1)$$

$$Q_3 = l_1 + \frac{\frac{3N}{4} - c}{f} (l_2 - l_1)$$

$$D_8 = l_1 + \frac{\frac{6N}{10} - c}{f} (l_2 - l_1)$$

$$P_{70} = l_1 + \frac{\frac{70N}{100} - c}{f} (l_2 - l_1)$$

उदाहरण 22—निम्नलिखित आबद्धों से दोनो चतुर्षक, छठा दशमक और सत्तरवां दशमक के मूल्य ज्ञात कीजिए।

वर्ष	22-26	26-30	30-34	34-38	38-42
आवृत्ति	6	7	4	2	1

हल—

वर्ष	आवृत्ति (f)	सकरी आवृत्तिया (c. f)
22-26	6	6
26-30	7	13
30-34	4	17
34-38	2	19
38-42	1	20

यहाँ  $N=20$

$$Q_1 = \frac{N}{4} \text{ वां मूल का आकार}$$

$$= \frac{20}{4} \text{ वा 5वां मूल का आकार}$$

अतः  $Q_1$ , 22-26 के वर्ष में स्थित है

275 वा मंद का आकार = 2nd मंद + 0.75 (3rd मंद का आकार — 2nd मंद का आकार)

$$\begin{aligned} &= 12 + 0.75 (14 - 12) \\ &= 12 + 0.75 \times 2 \\ &= 12 + 1.50 = 13.50 \text{ अरु उत्तर} \end{aligned}$$

$$Q_3 = \left[ \frac{3(N+1)}{4} \right] \text{ वा मंद का आकार}$$

$$= \frac{33}{4} = 8.25 \text{ वा मंद का आकार}$$

$$8.25 \text{ वा मंद का आकार} = 8 \text{ वीं मंद} + 0.25$$

$$(9 \text{ वीं मंद का आकार} - 8 \text{ वीं मंद का आकार})$$

$$= 32 + 0.25 (35 - 32)$$

$$= 32 + 0.25 \times 3 = 32 + 0.75$$

$$32.75 \text{ अरु उत्तर}$$

$$D_4 = \frac{6(N+1)}{10} \text{ वां मंद का आकार}$$

$$= \frac{66}{10} = 6.60 \text{ वा मंद का आकार}$$

$$= 6.60 \text{ वा मंद का आकार} = 6 \text{ वीं मंद} + 0.60$$

$$(7 \text{ वीं मंद का आकार} - 6 \text{ वीं मंद का आकार})$$

$$= 26 + 0.60 (30 - 26)$$

$$= 26 + 0.60 \times 4 = 26 + 2.40$$

$$= 28.40 \text{ अरु उत्तर}$$

$$P_{40} = \frac{40(n+1)}{100} \text{ वां मंद का आकार}$$

$$= \frac{40 \times 11}{100} \text{ वा मंद का आकार अथवा } 4.40 \text{ वां मंद}$$

$$4.40 \text{ वा मंद का आकार} = 4 \text{th मंद} + 0.40$$

$$(5 \text{ वीं मंद का आकार} - 4 \text{ वीं मंद का आकार})$$

$$= 18 + 0.40 (22 - 18)$$

$$= 18 + 0.40 \times 4 = 18 + 1.60$$

$$= 19.60 \text{ अरु उत्तर}$$

अविच्छिन्न अथवा वर्गान्तर वितरण (Continuous or class interval series)

अविच्छिन्न या वर्गान्तर वितरण में  $Q_1$ ,  $Q_3$ ,  $D_8$  एवं  $P_{75}$  ज्ञात करने के लिए सूत्र निम्नलिखित हैं

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - c}{f} (l_2 - l_1)$$

$$Q_3 = l_1 + \frac{\frac{3N}{4} - c}{f} (l_2 - l_1)$$

$$D_8 = l_1 + \frac{\frac{6N}{10} - c}{f} (l_2 - l_1)$$

$$P_{75} = l_1 + \frac{\frac{70N}{100} - c}{f} (l_2 - l_1)$$

उदाहरण 22—निम्नलिखित आकड़ों से दोनो चतुर्थांश, छठा दशमक और सत्तरवां दशमक के मूल्य ज्ञात कीजिए।

वर्ष	22-26	26-30	30-34	34-38	38-42
आवृत्ति	6	7	4	2	1

हल—

वर्ष	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति (c f)
22-26	6	6
26-30	7	13
30-34	4	17
34-38	2	19
38-42	1	20

यहाँ  $N=20$

$$Q_1 = \frac{N}{4} \text{ वां मूल्य का आकार}$$

$$= \frac{20}{4} \text{ या 5वां मूल्य का आकार}$$

अतः  $Q_1$ , 22-26 के वर्ष में स्थित है

उपरोक्त सूत्र के अनुसार

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= I_1 + \frac{\frac{n}{4} - c}{f} (I_2 - I_1) \\
 &= 22 + \frac{\frac{20}{4} - 0}{6} (26 - 22) \\
 &= 22 + \frac{5}{6} \times 4 = 22 + 3.3 \\
 &= 25.3 \text{ उत्तर}
 \end{aligned}$$

$$Q_3 = \frac{3N}{4} \text{ वा मद का आकार}$$

$$= \frac{3 \times 20}{4} \text{ वा 15 वा मद का आकार}$$

अतः  $Q_3$  वग 30 — 34 में स्थित है।

उपरोक्त सूत्र के अनुसार

$$Q_3 = I_1 + \frac{\frac{3N}{4} - C}{f} (I_2 - I_1)$$

$$= 30 + \frac{\frac{3 \times 20}{4} - 13}{4} (34 - 30)$$

$$= 30 + \frac{15 - 13}{4} (4) = 30 + \frac{2}{4} \times 4$$

$$= 30 + 2 = 32 \text{ उत्तर}$$

$$D_6 = \frac{6(N)}{10} \text{ वा मद का आकार}$$

$$= \frac{6 \times 20}{10} = 12 \text{ वा मद का आकार}$$

अतः  $D_6$  वग 26—30 में स्थित है।

उपरोक्त सूत्र के अनुसार

$$D_6 = I_1 + \frac{\frac{6N}{10} - c}{f} (I_2 - I_1)$$

$$\begin{aligned}
 &= 26 + \frac{6 \times 20}{10} - 6 \\
 &= 26 + \frac{10}{7} (30 - 26) \\
 &= 26 + \frac{12 - 6}{7} \times 4 = 26 + \frac{24}{7} \\
 &= 26 + 3.4 = 29.4 \text{ उत्तर}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{-0} &= \frac{70 (N)}{100} \text{ वां मद का आकार} \\
 &= \frac{70 \times 20}{100} = 14 \text{ वां मद का आकार}
 \end{aligned}$$

अतः  $P_{-0}$  वग 30—34 में स्थित है

उपरोक्त सूत्र के अनुसार

$$\begin{aligned}
 P_{-0} &= I_1 + \frac{\frac{70 N}{100} - c}{f} (I_2 - I_1) \\
 &= 30 + \frac{\frac{70 \times 20}{100} - 13}{4} (34 - 30) \\
 &= 30 + \frac{14 - 13}{4} \times 4 = 30 + 1 = 31 \text{ उत्तर}
 \end{aligned}$$

**भूयिष्ठक (Mode)** भूयिष्ठक (Mode) एक वितरण श्रेणी या शृंखला का वह मद है जो प्रायः इसमें आता है (Most occurs)। दूसरे शब्दों में भूयिष्ठक एक वितरण, श्रेणी या शृंखला की वह चर सख्या (Variable) होती है जिसकी आवृत्ति (frequency) अधिकतम होती है।

**भूयिष्ठक की गणना (Calculation of Mode)**

**व्यक्तिगत शृंखला (Individual Series)**—व्यक्तिगत श्रेणी या शृंखला में भूयिष्ठक वह मद होती है जो उसमें सबसे अधिक बार पाया जाता है।

उदाहरण 23 आठ विद्यार्थियों की ऊँचाइयों से० मी० में निम्नलिखित हैं  
155, 160, 155, 156, 155, 157, 155, 155  
भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए।



## क्रम संख्या

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8

स्पष्ट है कि ऊँचाई 155 सें० मी० दूसरो की अपेक्षा अधिक और इसलिए भूमिच्छक 155 सें० मी० है।

विच्छिन्न श्रेणी या शृङ्खला (Discrete Series)

इसमें भूमिच्छक को दो रीतियों से ज्ञात किया जा सकता है—रीति द्वारा (By Inspection Method) और (स) समूहीकरण (Grouping Method)

(क) निरीक्षण रीति (Inspection Method)

जब श्रेणी में अधिकतम आवृत्ति बिल्कुल स्पष्ट दिखती है, निरीक्षण द्वारा ही भूमिच्छक को ज्ञात किया जा सकता है। निरीक्षण रीति द्वारा भूमिच्छक का ज्ञान ठीक नहीं होता। अधिक अच्छी है।

(स) समूहीकरण रीति (Grouping Method)

जब दो या दो से अधिक मूल्यों की आवृत्तियाँ सबसे अधिक जान लेना कठिन होना है कि किस मूल्य या मद को भूमिच्छक का ठीक पता लगाने के लिए समूहीकरण रीति इस रीति के अन्तर्गत हमें दो सारणियाँ बनानी पड़ती हैं। पहली सारणी कहा जाता है और दूसरी सारणी को कहते हैं। पहली सारणी अर्थात् समूहीकरण सारणी (Grouping Table) दूसरी सारणी अर्थात् विश्लेषण सारणी (Analysis Table) इन दोनों सारणियों की सहायता से भूमिच्छक को ज्ञात करने के लिए भूमिच्छक पद या बग का ठीक ठीक पता चल जाता है।

निम्न उदाहरणों द्वारा विच्छिन्न श्रेणी में भूमिच्छक को स्पष्ट किया गया है

उदाहरण 24 — निम्न आंकड़ों से भ्रूयिच्छक मात कीजिए ।

माप	आवृत्ति	माप	आवृत्ति
11	36	19	50
12	50	20	46
13	32	21	53
14	60	22	60
15	57	23	38
16	65	24	48
17	44	25	34
18	48	26	38

हल

गणना के चर (Steps for calculation)

- 1 सर्वप्रथम एक सारणी बनाइए जिसमें चर मटों (Variables) के अतिरिक्त छ कालम (Columns) हों ।
- 2 पहले कालम में चर मटों की आवृत्तियाँ लिख दीजिए ।
- 3 दूसरे कालम में पहले कालम में दी हुई आवृत्तियों को दो-दो जैसे 1 और 2, 3 और 4, 5 और 6 इत्यादि के योग करके लिख दीजिए ।
- 4 तीसरे कालम में (कालम 1 में लिखी आवृत्तियों से) पुन दो-दो (पहली को छोड़ कर) आवृत्तियों जैसे 2 और 3, 4 और 5, 6 और 7 इत्यादि के योग बना कर लिखिए ।
- 5 चौथे कालम में (कालम 1 की आवृत्तियों से) "दूसरी आवृत्ति से तीन-तीन आवृत्तियों जैसे 1, 2 आर 3, 4, 5 और 6, 7, 8 और 9 इत्यादि के योग बना कर लिखिए ।
- 6 पाँचवें कालम में (कालम 1 की आवृत्तियों से) पहली आवृत्ति को छोड़ कर तीन-तीन आवृत्तियाँ जैसे 2, 3, 4, 5 6, 7 और 8, 9, 10 इत्यादि के योग बना कर लिखिए ।
- 7 छठे कालम में (कालम 1 की आवृत्तियों से) पहली दो आवृत्तियों को छोड़ कर तीन-तीन आवृत्तियों जैसे 3, 4, 5, 6, 7, 8 और 9, 10, 11 इत्यादि के योग बना कर लिखिए ।
- 8 तदनुषंग एक विरलेयण सारणी (Analysis Table) बनाइए । इसमें प्रत्येक कालम में अधिकतम आवृत्ति वाली सख्या को लिखिए ।
- 9 जिस मूल्य या सख्या की आवृत्तियाँ अधिकतम होती हैं वह सख्या भ्रूयिच्छक (Mode) होती है ।

अब हम उपरोक्त बताए गए पदों के अनुसार उदाहरण 24 को हल करते हैं

नाम	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$
11	36	86	82	118	142	149
12	50					
13	32					
14	60	92	182			
15	57	122				
16	65	92	109	142	157	
17	44					
18	48	96	98			144
19	50					
20	46	113	99	151		
21	53					
22	60	86	98		120	
23	38					
24	48	71	82	120		146
25	34					
26	38					

### विश्लेषण तालिका (Analysis Table)

कालम सङ्ख्या	अधिकतम आवृत्ति वाली मर्दें				
1			16		
2		15	16		
3	14	15			
4	14	15	16		
5		15	16	17	
6			16	17	18
योग	2	4	5	2	1

उपर की सारणी मे यह स्पष्ट ह कि मर्द 16 की आवृत्ति अधिकतम बार ह इसलिए भूयिच्छक 16 है—उत्तर

#### अविच्छिन्न श्रेणी में भूयिच्छक (Mode in Continuous Series)

अविच्छिन्न श्रेणी में सबसे पहले भूयिच्छक वर्ग (Modal group) को ज्ञात किया जाता है। यदि आवृत्तियाँ नियमित (regular) हैं तो भूयिच्छक का पता निरीक्षण द्वारा ही लग जाता है अथवा समूहीकरण रीति द्वारा इसको ज्ञात किया जाता है। जब भूयिच्छक वर्ग का पता चल जाता है तो फिर भूयिच्छक का ठीक मूल्य निर्माण करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है

$$\text{भूयिच्छक (Z)} = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} (l_2 - l_1)$$

जहाँ  $l_1$  = भूयिष्ठक वग की निम्न सीमा

$l_2$  = भूयिष्ठक वग की उच्च सीमा

$f_1$  = भूयिष्ठक वर्ग की आवृत्ति

$f_0$  = भूयिष्ठक वग से पहले वर्ग की आवृत्ति

$f_2$  = भूयिष्ठक वग के बाद के वग की आवृत्ति

ऊपर के सूत्र का इस प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$Z = l_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times h$$

जहाँ  $Z$  = भूयिष्ठक

$l_1$  = भूयिष्ठक वग की निम्न सीमा

$\Delta_1$  = भूयिष्ठक वग और भूयिष्ठक वग से पहले वर्ग की आवृत्तियों में अन्तर

$\Delta_2$  = भूयिष्ठक वग और भूयिष्ठक वर्गके बाद के वर्ग की आवृत्तियों में अन्तर

$h$  = भूयिष्ठक वग का वर्गान्तर

उदाहरण 25 निम्नलिखित सारणी में भूयिष्ठक का परिकलन कीजिए ।

आयकर (रुपयों में)	20—30	30—40	40—50	50—60
आयकर देने वाले व्यक्तियों की संख्या	7	9	14	17
आयकर (रुपयों में)	60—70	70—80	80—90	90—100
आयकर देने वाले व्यक्तियों की संख्या	21	8	5	3

हल

निरीक्षण से पता चलता है कि भूयिष्ठक 60—70 के वर्ग में स्थित है क्योंकि 60—70 के वग की आवृत्ति अधिकतम है ।

अब उपरोक्त सूत्र के अनुसार भूयिष्ठक के मूल्य को ज्ञात कीजिए ।

$$\begin{aligned} \text{भूयिष्ठक} &= l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} (l_2 - l_1) \\ &= 60 + \frac{21 - 17}{2(21) - 17 - 8} \times 10 \\ &= 60 + \frac{4}{17} \times 10 = 60 + \frac{40}{17} \\ &= 60 + 2.35 = 62.35 \text{ रुपये उत्तर} \end{aligned}$$

उदाहरण 26 निम्नलिखित श्रेणी से भ्रूयिष्ठक ज्ञात कीजिए

जितने दिन अनुपस्थित—इतने से कम	5	10	15	20	25
विद्यार्थियों की संख्या	29	224	465	582	634
जितने दिन अनुपस्थित—इतने से कम	30	35	40	45	
विद्यार्थियों की संख्या	644	650	653	655	

हल करने के पद (Steps of Solution)

- 1 वर्गों को बना कर लिखिए ।
- 2 इस उदाहरण में सचयी आवृत्तियाँ दी गई हैं अतः उनको सामान्य आवृत्तियों में बदल दीजिए ।
- 3 भ्रूयिष्ठक ज्ञात करने के सूत्र के अनुसार भ्रूयिष्ठक को ज्ञात कीजिए ।

हल जितने दिन अनुपस्थित	विद्यार्थियों की संख्या (f)	सचयी आवृत्तियाँ (c f)
0- 5	29	29
5-10	195	224
10-15	241	465
15-20	117	582
20-25	52	634
25-30	10	644
30-35	6	650
35-40	3	653
40-45	2	655

निरीक्षण से स्पष्ट है कि भ्रूयिष्ठक 10-15 के वर्ग में स्थित है क्योंकि इस वर्ग की आवृत्ति अधिकतम है ।

अब सूत्र को अपनाइए

$$\begin{aligned}
 \text{भ्रूयिष्ठक} &= i_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} (i_2 - i_1) \\
 &= 10 + \frac{241 - 195}{(2 \times 241) - (195 - 117)} (15 - 10) \\
 &= 10 + \frac{46}{482 - 312} \times 5 \\
 &= 10 + \frac{230}{170} = 10 + 1.35 \dots \\
 &= 11.35 \text{ उत्तर}
 \end{aligned}$$

## बिन्दुरेखीय पद्धति द्वारा भूमिष्ठक का निर्धारण (Location of Mode Graphically)

हम रेखाचित्र द्वारा भी भूमिष्ठक का मूल्य ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 27 रेखाचित्र द्वारा निम्न आवृत्ति वितरण से भूमिष्ठक का मूल्य ज्ञात कीजिए और मूल्य को जाँच कीजिए।

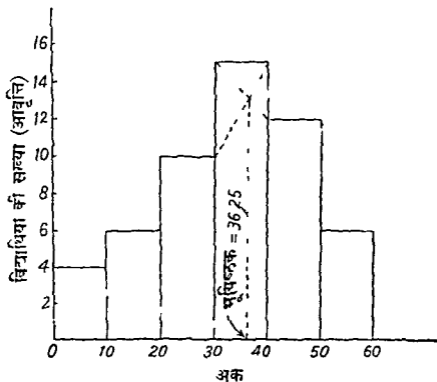
अंक	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60
विद्यार्थियों की संख्या	4	6	10	15	12	6

हल

पद (Steps)

- (1) उपरोक्त आकृष्टी से एक आवृत्ति आयत बनाइये।
- (2) सबसे ऊँची आयत भूमिष्ठक वग को दिखायगी।
- (3) भूमिष्ठक वग वाली आयत की सबसे ऊँची भुजा के दायें किनारे को इससे पहले वाली आयत की भुजा के दायें किनारे से मिला दीजिए।
- (4) भूमिष्ठक वग वाली आयत की सबसे ऊँची भुजा के दायें किनारे को इसके बाद वाले आयत की भुजा के बायें किनारे से मिला दीजिए।
- (5) यह दो रेखायें जहाँ मिलती ह, उस बिन्दु से X-अक्ष पर एक लम्ब डालिये। इस लम्ब के स्पष्ट बिन्दु का मूल्य पता लीजिए। यही भूमिष्ठक मूल्य होगा।

अंक (वर्गान्तर)	विद्यार्थियों की संख्या (आवृत्ति)
0—10	4
10—20	6
20—30	10
30—40	15
40—50	12
50—60	6



रेखाचित्र 19

भूयिष्ठक का मूल्य = 36.25

जाच (Verification)

यह स्पष्ट है कि भूयिष्ठक 30-40 के वर्ग में स्थित है

अब सूत्र के अनुसार—

$$\begin{aligned}
 \text{भूयिष्ठक} &= l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times (l_2 - l_1) \\
 &= 30 + \frac{15 - 10}{30 - 10 - 12} \times 10 \\
 &= 30 + \frac{5}{8} \times 10 \\
 &= 30 + 6.25 \\
 &= 36.25
 \end{aligned}$$

माध्य और मध्यका से भूयिष्ठक (Mode from Mean and Median)

निम्न सूत्र द्वारा भी हम भूयिष्ठक का व. मूल्य (Approximate Value) प्राप्त कर सकते हैं

$$\text{भूयिष्ठक} = \text{माध्य} - 3 (\text{माध्य} - \text{मध्यका})$$



### भूमिष्ठक के लाभ (Advantages of Mode)

- (1) अथ मापों की अपेक्षा भूमिष्ठक किसी श्रेणी या वितरण का अधिक प्रतिनिधि होता है।
- (2) यह सरलता से समझा जा सकता है।
- (3) चरम मूल्य (Extreme Values) का इस पर प्रभाव नहीं पड़ता।
- (4) कुछ परिस्थितियों में इसको निरीक्षण द्वारा (By Inspection) ही ज्ञात किया जा सकता है।
- (5) इस का ज्ञात करने के लिए सभी मूल्यों के मूल्य का ज्ञात होना आवश्यक नहीं होता।
- (6) इसका प्रदर्शन रेखाचित्र द्वारा भी किया जा सकता है।

### भूमिष्ठक का प्रयोग (Uses)

भूमिष्ठक का अधिकांश प्रयोग उत्पादन और व्यापार में होता है। यह बड़े-बड़े उत्पादकों के लिए बहुत लाभदायक है क्योंकि इसकी सहायता से उन्हें उस वस्तु के आकार तथा क्वालिटी का पता चल जाता है जिसे अधिक लोग मांगते हैं। अतः जूते, कपड़े (Ready made garments) यूनिकॉम, आदि, भूमिष्ठक के ज्ञात हो जाने से बड़े पैमाने पर तैयार किये जा सकते हैं।

### भूमिष्ठक की हानियाँ (Disadvantages of Mode)

- (1) प्रायः इसकी अशुद्ध परिभाषा दी जाती है और यह अनिश्चित होता है।
- (2) यह गणितीय एवं बीजगणितीय गणना के लिए उपयुक्त नहीं है।
- (3) यह वितरण के सभी अवलोकनों या मूल्यांकन पर आधारित नहीं होता।
- (4) अनेक अवस्थाओं में इसका निश्चित मूल्य ज्ञात करना सम्भव नहीं होता, क्योंकि दो-तीन या इससे भी अधिक भूमिष्ठक मूल्य (Modal Values) हो सकते हैं।
- (5) इसको ज्ञात करने की कोई एक निश्चित विधि नहीं है और सरल एवं शुद्ध हो।

### माध्य, मध्यिका और भूमिष्ठक — एक सापेक्ष मूल्यांकन (Mean, Median and Mode—A relative valuation)

समान्तर माध्य या माध्य का केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के लिए सबसे अधिक प्रयोग किया जाता है। उन परिस्थितियों को छोड़ कर जिनमें किसी अथवा पाध्य के प्रयोग का विशेष लाभ हो वर्य सभी स्थितियों में समान्तर माध्य का प्रयोग किया जाता है। उसका कारण यह है कि इसमें एक आदर्श माध्य के समझ में आना आसान है।

परन्तु गुणात्मक सम्बन्धों तथा जैत-इमानदारी कायकुशलता, माध्यमा आदि

के अध्ययन के लिए मध्यका अधिक उचित है। भूमिष्ठक ऋतु विज्ञान, व्यापार उद्योग आदि में अधिक लाभदायक है। उदाहरण के लिए जूता का माध्य आकार, तैमार कपडों का माध्य आकार आदि नात करने के लिए भूमिष्ठक का प्रयोग अधिक किया जाता है। अतः हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि उन परिस्थितियों को छाड़ कर जिनमें किसी अन्य माध्य के प्रयोग का विशेष लाभ हुआ शेष सभी सामान्य परिस्थितियों में समांतर माध्य ही अधिक उपयुक्त है।

### अभ्यास के लिए प्रश्न (Exercises)

- निम्न वितरण से समांतर माध्य नात कीजिए  

चर मूल्य	15	14	13	12	11	10	9
आवृत्ति	4	6	5	8	4	2	3

( $\Sigma = 124$ )
- निम्न वितरण से समांतर माध्य नात कीजिए  

चर मूल्य	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18
आवृत्ति	12	18	25	24	17	4

( $\Sigma = 834$ )
- एक कक्ष के 40 विद्यार्थियों की ऊँचाइयों से 0 मी० म दो गई है। उनकी आसत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।  

ऊँचाइया (सेंमी० में)	125-130	130-135	135-140	140-145
आवृत्ति	3	8	11	11
चादया (सेंमी० में)	145-150			
आवृत्ति	7			

( $\Sigma = 1389$  से०मी०)
- पद विचलन विधि द्वारा समांतर माध्य ज्ञात कीजिए  

x	0-10	10-20	20-30	30-40
f	6	8	11	16
x	40-50	50-60	60-70	70-80
f	14	8	5	2

( $\Sigma = 3614$ )
- निम्नलिखित आवृत्ति सारणी से समांतर माध्य, मध्यका आर भूमिष्ठक ज्ञात कीजिए  

मासिक किराया (₹०)	40-50	60-80	80-100
किराया देने वाले परिवारों की संख्या	6	9	11

मासिक किराया (रु०)	100-120	120-140	140 160
किराया देने वाले परिवारों की संख्या	20	15	10
मासिक किराया (रु०)	160 180	180 200	
किराया देने वाले परिवारों की संख्या	8	7	

$$\left( \begin{array}{l} \bar{x} = 110 \text{ भूयिष्ठक} = 110 \cdot 91 \\ \text{मध्यका} = 110 \end{array} \right)$$

6 निम्नलिखित श्रेणी से मध्यका और भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए

मद का माप	0-5	5-10	10 15	15-20	20 25
आवृत्ति	20	24	32	28	20
मद का माप	25 30	30-35	35 40	40 45	
आवृत्ति	16	34	10	8	

$$\left( \begin{array}{l} \text{मध्यका} = 18 \cdot 5 \\ \text{भूयिष्ठक} = 13 \cdot 23 \end{array} \right)$$

7 निम्नलिखित आवृत्तियों से मध्यका और भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए

अनुपस्थिति के दिन—से कम	5	10	15	20	25	30
विद्यार्थियों की संख्या	29	224	465	582	634	644
अनुपस्थिति के दिन — से कम	35	40	45			
विद्यार्थियों की संख्या	650	653	655			

$$\left( \begin{array}{l} \text{मध्यका} = 12 \cdot 5 \\ \text{भूयिष्ठक} = 11 \cdot 5 \end{array} \right)$$

8 निम्न आकड़ा से समान्तर माध्य मध्यका और भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए

आयु वर्षों में	कर्मचारियों की संख्या	आयु वर्षों में	कर्मचारियों की संख्या
25 से कम	8	45 से कम	103
30 से कम	23	50 से कम	113
35 से कम	51	55 से कम	117
40 से कम	81	60 से कम	120

$$\left( \begin{array}{l} \bar{x} = 36 \cdot 83 \\ \text{मध्यका} = 36 \cdot 5 \\ \text{भूयिष्ठक} = 36 \end{array} \right)$$

9 निम्नलिखित आकड़ों से मध्यका तथा प्रथम व तृतीय चतुर्थक मूल्य ज्ञात कीजिए

चल मूल्य	आवृत्ति	चल मूल्य	आवृत्ति
62.5-67.5	9	77.5-82.5	114
67.5-72.5	31	82.5-87.5	30
72.5-77.5	39	87.5-92.5	27

$$\left( \begin{array}{l} \text{मध्यका} = 79.5 \\ Q_1 = 75.38 \\ Q_3 = 82.26 \end{array} \right)$$

10 निम्न आकड़ों से प्रथम तथा तृतीय चतुर्थक 6वें दशमक तथा 80वें दशमक के मूल्य ज्ञात कीजिए

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
आवृत्ति	10	25	35	70	90	40	30

$$\left( \begin{array}{ll} Q_1 = 30.71 & D_4 = 44.44 \\ Q_3 = 49.45 & P_{80} = 52.5 \end{array} \right)$$

11 निम्न आंकड़ों से मध्यका तथा प्रथम व तृतीय चतुर्थक ज्ञात कीजिए

मासिक आय रुपयों में	पुरुषों की संख्या	मासिक आय रुपयों में	पुरुषों की संख्या
50 से कम	35	70-80	18
50-60	24	80-90	6
60-70	21	90 और अधिक	3

$$\left( \begin{array}{l} \text{मध्यका} = 57.7 \\ Q_1 = 47.7 \\ Q_3 = 70.14 \end{array} \right)$$

12 निम्न आकड़ों से समांतर माध्य मध्यका और भ्रूयिष्ठक ज्ञात कीजिए

वर्गान्तर	आवृत्ति	वर्गान्तर	आवृत्ति
0-7	19	28-35	51
7-14	25	35-42	43
14-21	36	42-49	28
21-28	72		

$$\left( \begin{array}{l} \bar{X} = 26.50 \\ \text{मध्यका} = 26.54 \\ \text{भ्रूयिष्ठक} = 25.42 \end{array} \right)$$

13 निम्न तालिका से मध्यका तथा भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए

वर्गांतर	आवृत्ति	वर्गांतर	आवृत्ति
0- 400	4	1600 2000	27
400 800	12	2000 2400	13
800-1200	40	2400-2800	19
1200 1600	41	2800 3200	4

$$\left( \begin{array}{l} \text{मध्यका} = 1390.24 \\ \text{भूयिष्ठक} = 1226.67 \end{array} \right)$$

14 निम्न आँकड़ों से माध्य मध्यक, तथा भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए

वर्गांतर	आवृत्ति	वर्गांतर	आवृत्ति
75 79	2	45-49	8
70 74	0	40-44	6
65 69	4	35 39	3
60 64	5	30-34	2
55-59	7	25 29	1
50-54	12		

$$\left( \begin{array}{l} \text{माध्य} = 52.3 \\ \text{मध्यका} = 52.42 \\ \text{भूयिष्ठक} = 52.3 \end{array} \right)$$

15 एक परीक्षा में 'क' और 'ख' और 'ग' तीन विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक निम्नलिखित हैं। विभिन्न विषयों के अलग-अलग भार (weight) दिए गए हैं। बताइए किस विद्यार्थी के औसत अंक अधिक हैं ?

विषय	भार	विद्यार्थी क	विद्यार्थी 'ख'	विद्यार्थी 'ग'
सांख्यिकी	4	70	80	92
जयगान्ध	3	90	75	40
व्यवसाय				
चरम्या	1	50	60	70
मुद्रा वकिय				
व व्यापार	2	60	45	50

(विद्यार्थी क 72 अंक)

16 निम्न आँकड़ा से बिदुरेलीय पद्धति द्वारा मध्यका भूल्य का निर्धारण कीजिए

अंक	0	10	10	20	20	30	30	40	40	50	50	60	60	70
विद्यार्थियों की संख्या	5		12		13		10		8		5		2	

$$( \text{मध्यका} = 20.8 )$$

17 गन के उत्पादन की सचयी आवृत्ति वितरण के निम्न आकड़ो से ओगिव वक्र (Ogive Curve) बनाइए तथा मध्यका मूल्य को ज्ञात कीजिए

उत्पादन सागत ( वर्गों में )	जोतों की सख्या ( आवृत्ति )
2-6	1
6-10	9
10-14	21
14-18	47
18-22	52
22-26	36
26-30	19
30-34	3

(मध्यका = 19.3)

18 माध्य मध्यका तथा भूयिष्ठक का सापेक्ष मूल्यांकन कीजिए ।

19 निम्न आकड़ो से एक आवृत्ति आयत बनाइए तथा भूयिष्ठक मूल्य का निर्धारण कीजिए

वर्गान्तर	आवृत्ति	वर्गान्तर	आवृत्ति
0-10	5	30-40	10
10-20	12	40-50	8
20-30	14	50-60	6

(भूयिष्ठक = 23.33)

20 एक परीक्षा में 100 विद्यार्थियो द्वारा प्राप्त प्रतिशत अंक नीचे दिए गए हैं । मध्यका प्रथम तथा ततीय चतुर्थक के मूल्य ज्ञात कीजिए

अंक	30-35	35-40	40-45	45-50
विद्यार्थियो की सख्या	14	16	18	23
अंक	50-55	55-60	60-65	
विद्यार्थियो की सख्या	18	8	3	

(मध्यका = 45.3  
 $Q_1 = 38.43$   
 $Q_3 = 51.11$ )

## अपकिरण या विक्षेपण के माप (MEASURES OF VARIABILITY OR DISPERSION)

अपकिरण या विक्षेपण का अर्थ (Meaning of Variability or dispersion)

पिछले अध्याय में हमने केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापन की विभिन्न विधियों का अध्ययन किया था जिनमें से समान्तर माध्य बहुत महत्व रखता है। परन्तु माध्य एक श्रृंखला या श्रेणी की सभी विक्षेपताएँ नहीं बताता। उदाहरण के लिए माध्य द्वारा यह पता नहीं चल सकता कि श्रृंखला या श्रेणी के विभिन्न व्यक्तिगत मूल्यों का माध्य से औसत अन्तर क्या है। इसके अतिरिक्त माध्य श्रेणी या श्रृंखला की रचना या स्वरूप पर प्रकाश डालने में असमर्थ है। इसको स्पष्ट करने के लिए हम निम्न उदाहरण देते हैं

श्रेणी "क" 100, 125, 95, 85, 105, 90

श्रेणी "ख" 10 240, 300, 0, 20, 30

श्रेणी "क" का समान्तर माध्य  $= \frac{600}{6} = 100$

श्रेणी "ख" का समान्तर माध्य  $= \frac{600}{6} = 100$

उपरोक्त दोनों श्रेणियों में समान्तर माध्य समान है अर्थात् 100 है। इस से हमें यह निष्कर्ष नहीं निकाल लेना चाहिए कि दोनों श्रेणियाँ समान हैं। वास्तव में इन दोनों श्रेणियों में बहुत असमानता है। श्रेणी "क" में माध्य श्रेणी के केवल एक मूल्य का ही प्रतिनिधित्व करता है अर्थात् यह उसके एक मूल्य के बराबर है। श्रेणी "ख" का अर्थ मूल्य 100 से भिन्न है परन्तु अन्तर कम है। दूसरी श्रेणी "ख" में माध्य श्रेणी के किसी भी मूल्य का प्रतिनिधित्व नहीं करता क्योंकि यह उसके किसी भी मूल्य के बराबर नहीं है। इसका श्रेणी के मूल्यों से अन्तर भी बहुत

अधिक है। श्रेणी के सभी मूल्य बहुत बिखरें हुए हैं और माध्य से बहुत दूर पड़े हैं।

अतः यह जानने के लिए कि एक श्रेणी का व्यक्तिगत मदा या मूल्य माध्य से कितनी दूरी पर है या उसका बिखराव या विस्तार क्या है अपकिरण या विक्षेपण के अध्ययन की आवश्यकता होती है। बॉवले (Bowley) के अनुसार "अपकिरण मर्दों के विचरण या अन्तर का माप है।" काफ़का (Kafka) के अनुसार "किसी श्रेणी में माध्य से मदा के बिखराव के माप का अपकिरण या विक्षेपण कहते हैं।"

### अपकिरण मापन की विधियाँ (Methods of Measuring Dispersion)

अपकिरण मापन की विभिन्न विधियाँ निम्नलिखित हैं

- 1 विस्तार (Range)
- 2 अर्द्ध-अन्तर चतुर्थ विस्तार या चतुर्थक विचलन (Semi-inter quartile range or quartile deviation),
- 3 माध्य विचलन (Mean Deviation),
- 4 प्रमाण विचलन (Standard Deviation) तथा
- 5 लारेंज वक्र (Lorenz Curve)

#### 1 विस्तार (Range)

किसी श्रेणी के अधिकतम मूल्य और न्यूनतम मूल्य के अन्तर को उनका विस्तार (range) कहा जाता है। दूसरे शब्दों में विस्तार एक श्रेणी में दो चरम (extreme) मदा की मापों का अन्तर है। उदाहरण के लिए यदि 8 विद्यार्थियों के द्वारा सांग्रिकी में प्राप्त अंक 40, 50, 55, 65, 80, 88, 89, 92 हों तो विस्तार  $92 - 40 = 52$  होगा। इसे विस्तार का निरपेक्ष माप कहते हैं। विस्तार के सापेक्ष माप का विस्तार गुणांक (Coefficient of Range) कहते हैं।

विस्तार के निरपेक्ष माप की दिवि इस प्रकार है

$$\text{विस्तार (Range)} = L - S$$

जहाँ  $L =$  अधिकतम मान या सख्या

$S =$  न्यूनतम मान या सख्या

विस्तार के सापेक्ष माप का सूत्र निम्नलिखित है

$$\text{विस्तार गुणांक (Coefficient of Range)} = \frac{L - S}{L + S}$$

#### विस्तार के लाभ (Merits of Range)

- 1 विस्तार की गणना सरलता से की जा सकती है।
- 2 इसकी गणना करने में बहुत ही कम समय लगता है।



- 3 मौसम पूर्वानुमान लगाने में विस्तार का प्रयोग लाभदायक होता है।
- 4 स्टॉक एव शेयर (Stocks & Shares) के मूल्यों में परिवर्तन अध्ययन में विस्तार का प्रयोग किया जाता है।

### विस्तार की हानियाँ (Demerits of Range)

- 1 विस्तार श्रेणी के अधिकतम और न्यूनतम मूल्यों से अधिक प्रभावित होता है। परन्तु इन दोनों चरम सीमाओं के बीच की मदों में होने वाले परिवर्तन का इस पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।
- 2 विस्तार से श्रेणी की बनावट का ज्ञान नहीं हो सकता।
- 3 विस्तार श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होता।
- 4 विचलमुखी आवृत्ति वितरणों में विस्तार का मूल्य ज्ञात नहीं किया जा सकता।

### विस्तार का मापन (Calculation of Range)

#### स्वतंत्र श्रृंखला (Individual Series)

##### उदाहरण 1

निम्न आँकड़ों में विस्तार और विस्तार गुणांक को ज्ञात कीजिए

10, 15, 20 30 40 50

#### हल

सूत्र के अनुसार

विस्तार =  $L - S$  अर्थात् अधिकतम संख्या - न्यूनतम संख्या  
यहाँ अधिकतम संख्या 50 है और न्यूनतम संख्या 10 है

$$\text{अतः विस्तार} = 50 - 10$$

$$= 40$$

$$\text{विस्तार गुणांक} = \frac{L - S}{L + S}$$

$$= \frac{50 - 10}{50 + 10}$$

$$= \frac{40}{60}$$

$$= 0.67$$

#### विच्छिन्न श्रृंखला (Discrete Series)

विच्छिन्न श्रृंखला में विस्तार को ज्ञात करने के लिए वर्गों की संख्या को लिया जाता है न कि उनकी आवृत्तियाँ को।

## उदाहरण 2

निम्न आंकड़ों से विस्तार और विस्तार गुणांक को ज्ञात कीजिए

(आय रु० में)	50	55	60	65	70	80	100	150
मजदूरों की संख्या	2	4	6	8	10	5	4	1

## हल

यहाँ अधिकतम मजदूरी 150 रुपये है और न्यूनतम मजदूरी 50 है। सूत्र के द्वारा

$$\text{विस्तार} = 150 - 50 = 100$$

$$\begin{aligned} \text{विस्तार गुणांक} &= \frac{150 - 50}{150 + 50} \\ &= \frac{100}{200} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

## अविच्छिन्न श्रृंखला (Continuous Series)

अविच्छिन्न श्रृंखला में विस्तार को ज्ञात करने के लिए पहले मध्य मूल्यों (Midvalues) को ज्ञात किया जा सकता है। तत्पश्चात् मर्दों की संख्या अर्थात् मध्य मूल्यों को लेकर सूत्र के अनुसार विस्तार व विस्तार गुणांक ज्ञात किया जाता है जैसा कि निम्न उदाहरण से स्पष्ट किया गया है

उदाहरण 3 निम्न आंकड़ों से विस्तार व विस्तार गुणांक ज्ञात कीजिए

अंक	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55
विद्यार्थियों की संख्या	2	10	8	25	5

## हल

अंक (Marks)	मध्य मूल्य (M V)	विद्यार्थियों की संख्या आवृत्ति (f)
5-15	10	2
15-25	20	10
25-35	30	8
35-45	40	25
45-55	50	5

यहाँ अधिकतम मूल्य 50 है और न्यूनतम मूल्य 10 है।

सूत्र के अनुसार

$$\begin{aligned}\text{विस्तार} &= L - S \\ &= 50 - 10 \\ &= 40\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{विस्तार गुणांक} &= \frac{L - S}{L + S} \\ &= \frac{50 - 10}{50 + 10} \\ &= \frac{40}{60} \\ &= 0.67 \text{ लगभग}\end{aligned}$$

उदाहरण 4 निम्न वितरण में विस्तार तथा विस्तार गुणांक ज्ञात कीजिए

माप	10-20	20-30	30-40	40-50
आवृत्ति	4	7	8	9
माप	50-60	60-70	70-80	80-90
आवृत्ति	11	9	2	1

हल

माप (Size)	मध्य मूल्य (M V)	आवृत्ति (f)
10-20	15	4
20-30	25	7
30-40	35	8
40-50	45	9
50-60	55	11
60-70	65	9
70-80	75	2
80-90	85	1

यहाँ अधिकतम मूल्य 85 है और न्यूनतम मूल्य 15 है।

$$\begin{aligned}\text{विस्तार} &= L - S \\ &= 85 - 15 = 70\end{aligned}$$

$$\text{विस्तार गुणांक} = \frac{L - S}{L + S}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{85-15}{85+15} \\
 &= \frac{70}{100} \\
 &= 0.70
 \end{aligned}$$

अर्द्ध अन्तर चतुर्थक विस्तार या चतुर्थक विचलन (Semi Inter Quartile Range or Quartile Deviation)

अर्द्ध अन्तर चतुर्थक विस्तार या चतुर्थक विचलन उच्च चतुर्थक ( $Q_3$ ) आर निम्न चतुर्थक ( $Q_1$ ) के अन्तर का आधा होता है। यह अपविकरण का निरपेक्ष माप है सांकेतिक रूप में

$$\text{अर्द्ध-अन्तर चतुर्थक विस्तार या चतुर्थक विचलन} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

जहाँ  $Q_3$  = तृतीय या उच्च चतुर्थक

$Q_1$  = प्रथम या निम्न चतुर्थक

चतुर्थक विचलन (Quartile Deviations) गुणांक अपविकरण का सापेक्ष माप है। इसको याद करने का सूत्र निम्नलिखित है

चतुर्थक विचलन गुणांक (Coeff of Q D)

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

चतुर्थक विचलन के लाभ (Merits of Q D)

- 1 अपविकरण के इस माप की गणना करना तथा इसको समझना आसान है।
- 2 यह श्रेणी की चरम सीमाओं (extreme limits) से बहुत कम प्रभावित होता है।
- 3 किसी श्रेणी के मध्य भाग के अध्ययन के लिए यह माप अधिक उचित है।

चतुर्थक विचलन की हानियाँ (Demerits of Q D)

- 1 यह 50 प्रतिशत मदा को छोड़ देता है। अतः यह श्रेणी के सभी मूल्या पर आधारित नहीं है।
- 2 इस पर निरक्षण परिवर्तना (Fluctuations of Sampling) का बहुत अधिक प्रभाव पड़ता है।
- 3 इसका बीजगणित द्वारा विवेचन नहीं किया जा सकता।
- 4 यह अपविकरण का एक शुद्ध माप नहीं केवल एक रफ (Rough) माप है।

चतुर्थक विस्तार, चतुर्थक विचलन और चतुर्थक विचलन गुणांक की गणना  
(Calculation of quartile range, quartile deviation and coefficient  
of quartile deviation)

चतुर्थक विस्तार, उच्च चतुर्थक और निम्नतम चतुर्थक के अंतर का कहा जाता है।

सूत्र के अनुसार

$$\text{चतुर्थक विस्तार} = Q_3 - Q_1$$

चतुर्थक विचलन या अर्ध-अंतर चतुर्थक विस्तार (Quartile deviation or semi inter quartile range), उच्च चतुर्थक ( $Q_3$ ) और निम्न चतुर्थक ( $Q_1$ ) के अंतर का आधा होता है। इसको ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित है

$$\text{चतुर्थक विचलन (Q D)} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$\text{चतुर्थक विचलन गुणांक (Coeff of Q D)} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

व्यक्तिगत श्रृंखला (Individual Series)

उदाहरण 5 निम्न आंकड़ों से चतुर्थक विस्तार, चतुर्थक विचलन और चतुर्थक गुणांक ज्ञात कीजिए

5, 7, 9, 10, 12, 14, 17

हल

$$\text{यहाँ } N = 7$$

$$Q_1 = \frac{N+1}{4} \text{ वा मंद का आकार}$$

$$= \left( \frac{7+1}{4} \right) \text{ या 2वाँ मंद का आकार}$$

$$= 7$$

$$Q_3 = \left( \frac{3(N+1)}{4} \right) \text{ वा मंद का आकार}$$

$$= \frac{24}{4} \text{ या 6वाँ मंद का आकार}$$

$$= 14$$

सूत्र के अनुसार

$$\begin{aligned} \text{चतुर्थक विस्तार (Quartile Range)} &= Q_3 - Q_1 \\ &= 14 - 7 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{चतुष्पक विचलन (Quartile Deviation)} &= \frac{Q_3 - Q_1}{2} \\ &= \frac{14 - 7}{2} = 3.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{चतुष्पक विचलन गुणांक (Coef of Q D)} &= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \\ &= \frac{14 - 7}{14 + 7} \\ &= \frac{7}{21} = 0.33 \end{aligned}$$

### विच्छिन्न श्रृंखला (Discrete Series)

उदाहरण 6 निम्नलिखित आकड़ों से चतुष्पक विचलन और उसका गुणांक ज्ञात कीजिए

भार	58	59	60	61	62	63	64	65	66
(किलोग्राम में)	38	59	60	61	62	63	64	65	66
विद्यार्थियों की संख्या	15	20	32	35	33	22	20	10	8

भार (किलोग्राम में) (x)	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति (c f)
58	15	15
59	20	35
60	32	67
61	35	102
62	33	135
63	22	157
64	20	177
65	10	187
66	8	195

यहाँ  $N = 195$

$$Q_1 = \left( \frac{N-1}{4} \right) \text{ वें मद का आकार}$$

$$= \frac{195+1}{4} = 49 \text{ वें मद का आकार}$$

$$= 60 \text{ कि० प्रा०}$$

$$Q_3 = \left( \frac{3(N+1)}{4} \right) \text{ वें मद का आकार}$$

$$= \frac{3(195+1)}{4} \text{ या } \frac{588}{4} = 147 \text{ वें मद का आकार}$$

$$= 63 \text{ कि० प्रा०}$$

$$\text{चतुर्थक विचलन (Q D)} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{63-60}{2} = 1.5 \text{ कि० प्रा०}$$

$$\text{चतुर्थक विचलन गुणांक (Coeff of Q D)} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$= \frac{63-60}{63+60}$$

$$= \frac{3}{123} = 0.024$$

### अविच्छिन्न श्रृंखला (Continuous Series)

उदाहरण 7 निम्नलिखित आकड़ों में चतुर्थक विचलन और उसका गुणांक ज्ञात कीजिए

अक	0 10	10-20	20 30	30 40
विद्यार्थियों की संख्या	30	67	80	90
अक	40 50	50-60	60 70	70 80
विद्यार्थियों की संख्या	95	82	78	49
अक	80-90	90-100		
विद्यार्थियों की संख्या	19	10		

हल

अंक (Marks)	विद्यार्थियों की संख्या संचयी आयतियों	
	(f)	(cf)
0-10	30	30
10-20	67	97
20-30	80	177
30-40	90	267
40-50	95	362
50-60	82	444
60-70	78	522
70-80	49	571
80-90	19	590
90-100	10	600

यहाँ  $N=600$ 

$$Q_1 = \left( \frac{N}{4} \right) \text{ वं मद का आकार}$$

$$= \frac{600}{4} = 150 \text{ वं मद का आकार}$$

150 वीं मद 20—30 के वर्ग में स्थित है।

सूत्र के अनुसार

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - C}{f} (l_2 - l_1)$$

$$= 20 + \frac{150 - 97}{80} (30 - 20)$$

$$= 20 + \frac{150 - 97}{80} \times 10$$

$$= 20 + \frac{53}{80} \times 10$$

$$= 20 + \frac{53}{8} = 20 + 6.6$$

$$= 26.6 \text{ अंक}$$

$$Q_3 = \frac{3N}{4} \text{ वं मद का आकार}$$

$$\frac{3 \times 600}{4} = \frac{1800}{4} = 450 \text{ वं मद का आकार}$$



450 मद का आकार वग 60—70 में स्थित है।

सूत्र के अनुसार

$$\begin{aligned}
 Q_3 &= l_2 + \frac{\frac{3N}{4} - C}{f} (l_3 - l_2) \\
 &= 60 + \frac{450 - 444}{78} (70 - 60) \\
 &= 60 + \frac{6}{78} \times 10 = 60 + \frac{30}{39} \\
 &= 60 + 77 = 60.77 \text{ या } 60.8 \text{ अंक}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{चतुर्थक विचलन (Q D)} &= \frac{60.8 - 26.6}{2} = \frac{34.2}{2} \\
 &= 17.1 \text{ अंक}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{चतुर्थक विचलन गुणांक} &= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \\
 \text{(Coeff of Q D)} &= \frac{60.8 - 26.6}{60.8 + 26.6} \\
 &= \frac{34.2}{87.4} \\
 &= 0.39
 \end{aligned}$$

### माध्य विचलन (Mean Deviation)

माध्य विचलन को औसत विचलन भी कहा जाता है। यह एक श्रेणी में उसके माध्य मध्यका या भूमिष्ठक से लिए गए विचलनों का माध्य होता है। यह एक ऐसा मूल्य है जो किसी श्रेणी के माध्य में विभिन्न मूल्यों के औसत विचलन को प्रकट करता है। माध्यविचलन निकालते समय  $+$  व  $-$  चिह्न को छोड़ दिया जाता है अर्थात् ऋणात्मक विचलन (negative deviations) को भी धनात्मक (Positive) मान लिया जाता है। विचलन पूरे माध्य मध्यका या भूमिष्ठक से लिए जाने चाहिए न कि कल्पित माध्य से। यह श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता है। माध्य विचलन एक श्रेणी में अपविरण या फैलाव को दिखाता है। माध्य विचलन जितना अधिक होता है उस श्रेणी में अपविरण या फैलाव (Scatterness or spreadness) उतना ही अधिक होता है।

### माध्य विचलन के गुण (Merits of Mean Deviation)

- 1 माध्य विचलन श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता है।
- 2 प्रमाण विचलन (Standard Deviation) की तुलना में इसकी गणना करने तथा उससे समझना आसान है।

- 3 इस पर श्रेणी की चरम सीमाया (extreme limits) का बहुत कम प्रभाव पड़ता है ।
- 4 माध्य विचलन की गणना माध्य, मध्यका या भूयिष्ठक में से किसी एक से की जा सकती है ।

### माध्य विचलन के दोष (Demerits of Mean Deviation)

- 1 माध्य विचलन का सबसे बड़ा दोष कि  $+$  व  $-$  चिन्हों को छोड़कर विचलनों को धनात्मक रूप में प्रदर्शित करता है जो कि गणित के अनुसार असुद्ध एवं अवैज्ञानिक है ।
- 2 इसका बीजगणित द्वारा विवेचन नहीं किया जा सकता ।
- 3 यह अधिक विश्वसनीय नहीं है । अतः सांख्यिकी में इसका प्रयोग बहुत कम होता है ।

### माध्य विचलन की गणना (Calculation of Mean Deviation)

#### व्यक्तिगत श्रृंखला (Individual Series)

माध्य मध्यका या भूयिष्ठक जिससे चाहिए हो विचलन निकाला जा सकता है । माध्य से विचलन का  $|dx|$  द्वारा मध्यका से विचलन को  $(dm)$  द्वारा और भूयिष्ठक से विचलन को  $|dz|$  द्वारा व्यक्त किया जाता है । सभी विचलनों को धनात्मक (Positive) लिया जाता है ।

माध्य विचलन गणना का सूत्र निम्नलिखित है

$$\text{माध्य से माध्य विचलन (Mean deviation from mean)} = \frac{\sum |dx|}{N}$$

$$\text{मध्यका से माध्य विचलन (Mean deviation from median)} = \frac{\sum |dm|}{N}$$

$$\text{भूयिष्ठक से माध्य विचलन (Mean deviation from mode)} = \frac{\sum |dz|}{N}$$

#### माध्य से माध्य विचलन (Mean Deviation from Mean)

उदाहरण 8 निम्नलिखित आकड़ों से माध्य विचलन और उसका गुणांक ज्ञात कीजिए

10, 13, 22, 18, 15, 24

हल

गणना के पद (Steps of Calculation)

- 1 समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए ।
- 2 माध्य से  $+$  या  $-$  चिन्ह को छोड़ते हुए विचलन लीजिए और उसे  $(dx)$  कहिये ।

- 3 विचलना को जोड़ कर  $\Sigma |dx|$  प्राप्त कीजिए और  
 4 सूत्र को अपनाकर माध्य विचलन को ज्ञात कीजिए। सूत्र इस प्रकार है

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{\Sigma |dx|}{N}$$

x	dx
10	7
13	4
22	5
18	1
15	2
24	7
$\Sigma x = 102$	$\Sigma  dx  = 26$

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\Sigma X}{N} \\ &= \frac{102}{6} = 17\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{माध्य विचलन (माध्य से)} &= \frac{\Sigma |dx|}{N} \\ &= \frac{26}{6} \\ &= 4.33\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{माध्य विचलन गुणांक (Coeff of M D)} &= \frac{\text{माध्य विचलन}}{\text{माध्य}} \\ &= \frac{4.33}{17} \\ &= 0.25\end{aligned}$$

माध्य विचलन माध्यक की सहायता से

उदाहरण 9 निम्नलिखित आंकड़ों से माध्यक की सहायता से माध्य विचलन और उसका गुणांक ज्ञात कीजिए

वेतन (₹ म) 3 5, 6, 5, 8, 5 4 8, 7 9

हल

- 1 धाकड़ा का आरोही क्रम में रख कर एक सारणी में रख म लिखिए।

- 2 मध्यका ज्ञात कीजिए ।
- 3 मध्यका से (+) या (-) चिह्न को छोड़ते हुए विचलन लीजिए और उसे  $|dm|$  नाम देकर लिखिए ।
- 4 सूत्र के अनुसार माध्य विचलन ज्ञात कीजिए । जैसा कि नीचे प्रदर्शित किया गया है

घेतन(२० में) x	$ dm $ (मध्यका से)
3	2.5
4	1.5
5	0.5
5	0.5
5	0.5
6	0.5
7	1.5
8	2.5
8	2.5
9	3.5
$N = 10$	$\Sigma  dm  = 16$

$$\begin{aligned} \text{मध्यका} &= \left( \frac{N+1}{2} \right) \text{वा मद का आकार} \\ &= \frac{10+1}{2} = 5.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{माध्य विचलन (मध्यका से)} &= \frac{\Sigma |dm|}{N} \\ &= \frac{16}{10} = 1.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{माध्य विचलन गुणांक (Coeff. of M. D)} &= \frac{1.6}{5.5} \\ &= 0.29 \end{aligned}$$

### विच्छिन्न श्रृंखला (Discrete Series)

उदाहरण 10 निम्नलिखित आंकड़े मध्यका से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए

रूपये	20	18	16	12	10	8	6
आवृत्तियाँ	2	4	9	18	27	25	1

हल माध्य विचलन (मध्यका से)

उपरोक्त आंकड़ों को आरोही क्रम में एक सारणी के रूप में लिखिए और मध्यका की गणना कीजिए।

(x)	(f)	(c f)
6	1	1
8	14	15
10	25	40
12	27	67
14	18	85
16	9	94
18	4	98
20	2	100

$$\text{मध्यका} = \left( \frac{N+1}{2} \right) \text{वा मंद का आकार}$$

$$= \frac{100+1}{2} = 50.5$$

$$50.5 \text{ की मंद का आकार} = 12$$

माध्य विचलन की गणना (मध्यका से)

(x)	(f)	dm	f   dm
6	1	6	6
8	14	4	56
10	25	2	50
12	27	0	0
14	18	2	36
16	9	4	36
18	4	6	24
20	2	8	16
$\Sigma f = 100$			$\Sigma f   dm  $

$$\begin{aligned} \text{माध्य विचलन (मध्यका से)} &= \frac{\Sigma f}{100} \\ &= \frac{224}{100} \end{aligned}$$

माध्य विचलन गुणांक (Coeff of Mean Deviation)

$$= \frac{\text{माध्य विचलन}}{\text{माध्य}} = \frac{2.24}{12} = 0.18$$

अविच्छिन्न श्रेणी (Class Interval Series)

उदाहरण 11 निम्न आकड़ा से माध्य से माध्य विचलन और उसका गुणांक ज्ञात कीजिए

आय (रुपया में)	80-100	100-120	120-140	140-160
व्यक्तियों की संख्या	5	6	2	1
आय (रुपयों में)	160-180			
व्यक्तियों की संख्या	4			
हल				

सब प्रथम माध्य की गणना कीजिए।

आय (रुपयों में)	माध्य मूल्य (M V) (x)	आवृत्ति (f)	(fx)
80-100	90	5	450
100-120	110	6	660
120-140	130	2	260
140-160	150	1	150
160-180	170	4	680
		$\Sigma f = 21$	$\Sigma fx = 2200$

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{2200}{21} = 104.76$$

माध्य विचलन (M.D.) का माध्य का

घनाते हैं

मध्यमूल्य	आवृत्ति	माध्य विचलन + या - चिह्न छोड़ कर	$f   dx  $
(x)	(f)	$  dx  $	175
90	5	35	90
100	6	15	10
130	2	5	75
150	3	25	110
170	4	45	
$\Sigma f = 20$		$\Sigma f   dx   = 530$	

अब सूत्र को अपनाइए

$$\text{माध्य विचलन (M D)} = \frac{\Sigma f | dx |}{N}$$

$$= \frac{530}{20} = 26.5$$

$$\text{माध्य विचलन गुणांक (Coeff of M D)} = \frac{\text{माध्य विचलन}}{\text{माध्य}}$$

$$= \frac{26.5}{125} = 0.21$$

उदाहरण 12 निम्न वितरण से (मध्यका से) माध्य विचलन और उतका गुणांक ज्ञात कीजिए

वर्ग का आकार	माध्य-मूल्य (x)	(f)	(c f)
0-4	2	4	4
4-8	6	6	10
8-12	10	8	18
12-16	14	5	23
16-20	18	2	25





### प्रमाण विचलन (Standard Deviation)

किसी श्रेणी के समांतर माध्य से निकाले गए समस्त विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल उस श्रेणी का प्रमाण विचलन कहलाता है।\* प्रमाण विचलन अपविरण के मापों में सबसे अधिक श्रेष्ठ है। इसी कारण सांख्यिकी में इसका प्रयोग सबसे अधिक होता है। प्रमाण विचलन को द्वितीय घात का अपविरण भी कहते हैं।

### प्रमाण विचलन के गुण (Merits of Standard Deviation)

- 1 प्रमाण विचलन अपविरण के मापों में से सबसे अधिक श्रेष्ठ तथा प्रचलित है।
- 2 यह श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता है।
- 3 यह अपविरण का एक निश्चित माप है।
- 4 यह निदर्शन परिवर्तनों से बहुत कम प्रभावित होता है।
- 5 इसका बीजगणित द्वारा विवेचन किया जा सकता है।

### प्रमाण विचलन के दोष (Demerits of Standard Deviation)

- 1 अपविरण के इस माप की गणना कठिन है।
- 2 इस पर श्रेणी की चरम सीमाओं का अत्याधिक प्रभाव पड़ता है।

### विचरण गुणांक (Coefficient of Variation)

प्रमाण विचलन को समांतर माध्य से भाग देने पर और 100 में गुणा कर देने से जो प्रतिशत प्राप्त होता है उसे विचरण गुणांक (Coefficient of Variation) कहा जाता है। सांख्यिक रूप से  $C V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

### विचरण मापांक

किसी श्रेणी का प्रमाण विचलन के वर्ग का विचरण मापांक कहा जाता है। सूत्र के अनुसार विचरण मापांक =  $\sigma^2$

### प्रमाण विचलन परिकलन की विधियाँ (Methods of Calculating Standard Deviation)

#### व्यक्तिगत श्रृंखला (Individual Series)

व्यक्तिगत श्रृंखला के लिए प्रमाण विचलन परिकलन दो विधियाँ से किया जाता है—प्रत्यक्ष विधि और अप्रत्यक्ष विधि। प्रत्यक्ष विधि (Direct Method) में

\*The standard deviation is the square root of arithmetic mean of the squares of deviations of items taken from their arithmetic mean

विचलन समांतर माध्य से निकाले जाते हैं और अप्रत्यक्ष विधि (Indirect Method) में विचलन नपित माध्य (Assumed mean) से निकाले जाते हैं। सूत्र इस प्रकार है

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$$

जहाँ  $\sigma$  = प्रमाप विचलन

$d$  = माध्य से विचलन

$d^2$  = माध्य से विचलनों का वर्ग (Square)

$\sum d^2$  = विचलनों के वर्गों का योग

$N$  = मदों की संख्या

(ii) अप्रत्यक्ष विधि में गणना का सूत्र इस प्रकार है

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2}$$

उदाहरण 1<sup>2</sup> निम्न मदों में प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए।

4 6 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22

हल

प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

मदें (x)	माध्य से विचलन (d)	विचलनों का वर्ग (d <sup>2</sup> )
4	-9	81
6	-7	49
8	-5	25
10	-3	9
12	-1	1
14	1	1
16	3	9
18	5	25
20	7	49
22	9	81
$\Sigma x = 130$	$\Sigma d = 0$	$\Sigma d^2 = 330$

$$\begin{aligned}\text{समांतर माध्य } (\bar{X}) &= \frac{\sum x}{N} = \frac{130}{10} \\ &= 13\end{aligned}$$

प्रत्यक्ष विधि द्वारा

$$\begin{aligned}\text{प्रमाण विचलन} &= \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}} \\ &= \sqrt{\frac{330}{10}} \\ &= 5.74\end{aligned}$$

अप्रत्यक्ष विधि द्वारा

$$\begin{aligned}\text{प्रमाण विचलन } \sigma &= \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{330}{10} - \left(\frac{0}{10}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{330}{10}} \\ &= 5.74\end{aligned}$$

विच्छिन्न श्रृंखला के लिए प्रमाण विचलन गणना के लिए सूत्र  
(Formula for the Calculation of Standard Deviation in Discrete Series)

(क) प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f d^2}{N}}$$

जहाँ  $f$  = आवृत्ति

$n$  = आवृत्तियों का योग

(ख) अप्रत्यक्ष विधि (Indirect Method)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f d^2}{N} - \left(\frac{\sum f d}{N}\right)^2}$$

उदाहरण 14 निम्न आवृत्ति वितरण के लिए प्रमाण विचलन तथा विचरण  
गुणांक की गणना कीजिए

$x$	7	9	11	13	15	
$f$	2	4	8	4	2	-



## अविच्छिन्न श्रृंखला (Class Interval Series)

उदाहरण 15 निम्नलिखित वितरण के प्रमाण विचलन की गणना कीजिए

आयु	20-30	30-40	40-50	50-60
सदस्या की संख्या	3	8	5	18
आयु	60-70	70-80	80-90	
सदस्या की संख्या	3	2	1	

हल

आयु वर्ग	मध्य मूल्य ( $x$ )	आवृत्ति ( $f$ )	( $fx$ )	( $d$ )	( $d^2$ )	( $fd^2$ )
20-30	25	3	75	-25	625	1875
30-40	35	8	280	-15	225	1800
40-50	45	5	225	-5	25	125
50-60	55	18	990	5	25	450
60-70	65	3	195	15	225	675
70-80	75	2	156	25	625	1250
80-90	85	1	85	35	1225	1225
		$\Sigma f = 40$	$\Sigma fx = 2000$			$\Sigma fd^2 = 7400$

$$\begin{aligned} \text{समान्तर माध्य } (\bar{X}) &= \frac{\Sigma fx}{N} \\ &= \frac{2000}{40} = 50 \end{aligned}$$

सूत्र के अनुसार

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}} \\ &= \frac{7400}{40} \\ &= 185 \\ &= 13.6 \end{aligned}$$

## पद विचलन विधि (Step Deviation Method)

उदाहरण 16 पद विचलन विधि (Step Deviation Method) द्वारा निम्न लिखित आवृत्ति वितरण के लिए प्रमाण विचलन पात कीजिए

अक	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
विद्यार्थियों की संख्या	3	5	9	12	15	4

हस

यह कल्पित माध्य से मदा का विचलन लीजिए और उस समापवतक अर्थात् वर्गान्तर से भाग दकर लिखिए और उसे  $d$  से सम्बाधित कीजिए ।

$$\text{अतः } d' = \frac{x-a}{1}$$

महाँ  $a$  = कल्पित माध्य

इस विधि से द्वारा प्रमाप विचलन ज्ञात करने का सूत्र इस प्रकार है

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \times 1$$

कल्पित माध्य = 27.5

वर्गान्तर अक	मध्य मूल्य (x)	(f)	(d)	(d <sup>2</sup> )	(fd)	(fd' <sup>2</sup> )
15-20	17.5	3	-2	4	-6	12
20-25	22.5	5	-1	1	-5	5
25-30	27.5	9	0	0	0	0
30-35	32.5	12	1	1	12	12
35-40	37.5	15	2	4	30	60
40-45	42.5	4	3	9	12	36
		$\sum f = 48$			$\sum fd = 43$	$\sum fd^2 = 125$

$$\text{अब प्रमाप विचलन} = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \times 1$$

सूत्र के अनुसार

$$\sigma = \sqrt{\frac{125}{48} - \left(\frac{43}{48}\right)^2} \times 5$$

$$= \sqrt{\frac{125}{48} - \frac{1849}{2304}} \times 5$$

$$= \sqrt{\frac{4151}{2304}} \times 5$$

$$= \frac{644}{48} \times 5 = 67$$

उदाहरण 17 निम्नलिखित आवृत्ति वितरण के लिए प्रमाप विचलन और विचरण गुणांक (Coefficient of Variance) की गणना कीजिए

वर्गांतर	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30
आवृत्ति	1	2	3	4	5

वर्गान्तर	मध्य मूल्य (x)	(f)	(fx)	(d)	(d <sup>2</sup> )	(fd <sup>2</sup> )
0-6	3	1	3	-16	256	256
6-12	9	2	18	-10	100	200
12-18	15	3	45	-4	16	48
18-24	21	4	84	2	4	16
24-30	27	5	135	8	64	320
		$\Sigma f = 15$	$\Sigma fx = 285$			$\Sigma fd^2 = 840$

$$\begin{aligned} \text{समान्तर माध्य} &= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{285}{15} \\ &= 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{प्रमाप विचलन } (\sigma) &= \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}} \\ &= \sqrt{\frac{840}{15}} \\ &= \sqrt{56} = 7.48 \end{aligned}$$

विचरण गुणांक (Coefficient of Variance)

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100 \\ &= \frac{7.48}{19} \times 100 \\ &= 39.4 \end{aligned}$$

### 5. सार्वेज वक्र (Lorenz Curve)

अपविरण (Dispersion) का रेखीय प्रदर्शन सार्वेज वक्र द्वारा किया जा

सकता है। अमरोका के एक अग्र-सांख्यिकार डा० लारेंज पहले व्यक्ति थे जिन्होंने रेखीय विधि द्वारा धन के अपविरण या वितरण का अध्ययन किया था।

**लारेंज वक्र बनाने की विधि**

लारेंज वक्र एक सचीय प्रतिशत वक्र है। अतः इसको बनाने के लिए मदों के मूल्यों और आवृत्तियों को सचीय करना पड़ता है। इनका सचीय करने के पश्चात् प्रत्येक योग को 100 मानकर प्रत्येक मूल्य और आवृत्ति को प्रतिशत में परिवर्तित कर दिया जाता है और उन प्रतिशतों का योग कर लिया जाता है।

व्यक्तियों या जनसंख्या सम्प्रतिशत सचीय प्रतिशत (Cumulated population Percentages) को X-अक्ष पर दिखाया जाता है और सचीय भाग प्रतिशतों को Y अक्ष पर दिखाया जाता है। Y-अक्ष पर मापदण्ड (Scale) 0 से आरम्भ करके 100 तक लिया जाता है जब कि X-अक्ष का मापदण्ड (Scale) उल्टा चलता है अर्थात् 100 से आरम्भ करके 0 तक लिया जाता है। X-अक्ष पर 0 को Y-अक्ष के 100 से मिलान से एक रेखा बन जायेगी। इस रेखा का समान वितरण रेखा (Line of Equal Distribution) कहा जाता है।

यदि वास्तविक वितरण रेखा (जो कि सचीय प्रतिशतों और सचीय जनसंख्या प्रतिशतों को अंकित करने में प्राप्त होती है) समान वितरण रेखा पर गिरती है तो वास्तविक आय वितरण समान होगी अर्थात् अपविरण की मात्रा शून्य होगी। जितनी वास्तविक वितरण रेखा समान वितरण से दूर होगी अपविरण या असमानता की मात्रा उतनी ही बढ़ती जाएगी। यदि दो लारेंज वक्रों में तुलना करनी हो तो जो वक्र, समान वितरण रेखा में अधिक ऊँची पर होगी, उस श्रेणी में अपविरण या असमानता की मात्रा अधिक होगी।

उदाहरण 18 निम्न आंकड़ों से (एक ही रेखा चित्र में) लारेंज वक्र बनाइये और उनकी व्याख्या कीजिए

आय (हजार ₹० म)	व्यक्तियों की संख्या (हजारों में)	
	देश (क)	देश (ख)
20	16	30
40	14	12
80	10	4
100	5	2
160	4	2

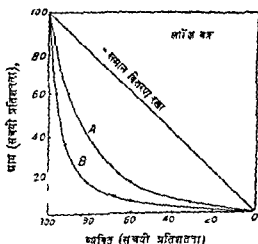


हल

उपरोक्त आकड़ों से लॉरेज वक्र बनाने के लिए मदो और उनकी आवृतियों को सचीय कर लिया जाता है और उनको प्रतिशतता में बदल दिया जाता है जैसा कि निम्न सारणी में किया गया है

आय हजार रु० में	सर्वाय आय	सचीय प्रतिशत	देश (क)			देश (ख)		
			व्यक्तिमो की संख्या द्वारा म	सचीय संख्या	सचीय प्रति- शत	व्यक्ति- या की संख्या द्वारा म	सचीय संख्या	सचीय प्रतिशत
20	20	5	16	16	32	30	30	60
40	60	15	14	30	60	12	42	84
80	140	35	10	40	80	4	46	92
100	240	60	6	46	92	2	48	96
160	400	100	4	50	100	2	50	100

अब उपर बताई गई विधि के अनुसार दिए गए आकड़ों में लॉरेज वक्र को बनाते हैं। (दखिए निम्न रखा चित्र 20 को)



रखा चित्र 20

रखा चित्र 20 का देखने से पता चलता है कि वक्र 'A' में आय वितरण असमान है क्योंकि 5 प्रतिशत आय 32 प्रतिशत व्यक्तियों के पास है 15 प्रतिशत

आय 60 प्रतिशत व्यक्तियों के पास है 35 % आय 80 % व्यक्तियों के पास है इत्यादि। "सोनिय वर्ग 'ब'" की वास्तविक आय वितरण रेखा जो कि सचधी आय प्रतिशता और व्यक्तियों के सचधी प्रतिशता को अंकित करके बनाई है समान वितरण रेखा (Line of Equal Distribution) से कुछ दूर हटी हुई है। परंतु वर्ग 'स' में आय वितरण वर्ग 'क' की अपेक्षा अधिक असमान है क्योंकि आम का 5 प्रतिशत भाग 60 प्रतिशत व्यक्तियों के पास है आय का 15 प्रतिशत भाग 84 प्रतिशत व्यक्तियों के पास है इत्यादि। इसीलिए वर्ग 'स' की वास्तविक आय वितरण रेखा (जो कि "स" की आय प्रतिशतों और व्यक्तियों के सचधी प्रतिशता की अंकित रेखा से कुछ दूर हटी हुई है) की वास्तविक आय वितरण रेखा की अपेक्षा वास्तविक आय वितरण रेखा से अधिक दूरी पर है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि तारेंज वर्ग आय वितरण में अध्ययन में लाभदायक है। किंतु तारेंज वर्ग में त्रुटि यह है कि यह अपरिचय का सख्यात्मक मूल्य (Numerical Value) नहीं बताता है। यह केवल उतना ही बता सकता है कि कोई वृत्त (Scals) समान वितरण से कितनी दूरी पर हटी हुई है।

### अभ्यास के लिए प्रश्न

1. अपरिचय मापन की विभिन्न रीतियों के सापेक्ष गुण व दोषों का वर्णन कीजिए।
2. निम्नलिखित आंकड़ों से विस्तार और विन्तर गुणांक कात कीजिए  

$$\sqrt{1 \ 1 \ 1^2 \ 1^3 \ 1^4 \ 1^5 \ 1^6 \ 1^7 \ 1^8}$$
 (विस्तार=4.5 विन्तर गुणांक=0.132)
3. निम्न आंकड़ों के लिए माध्य विचलन और प्रमाप विचलन की गणना कीजिए

मजदूरी (₹० म)	व्यक्तियों की संख्या	मजदूरी (₹० म)	व्यक्तियों का संख्या
0-4	5	12-16	15
4-8	7	16-20	7
8-12	10	20-24	6

(माध्य विचलन=4.83  
प्रमाप विचलन=5.8)

- 4 निम्न आकड़ों से चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिए

नाप	आवृत्ति	नाप	आवृत्ति
4-8	6	24-28	12
8-12	10	28-32	10
12-16	18	32-36	6
16-20	30	36-40	2
20-24	15		

$$(\text{चतुर्थक विचलन } (Q D) = 5.20)$$

- 5 निम्न आकड़ों से अर्ध-अन्तर चतुर्थक विस्तार और उसका गुणांक ज्ञात कीजिए

अंक	विद्यार्थियों की संख्या	अंक	विद्यार्थियों की संख्या
25-30	1	45-50	12
30-35	2	50-55	3
35-40	6	55-60	2
40-45	7	60-65	2

[सन्तत अर्ध-अन्तर चतुर्थक विस्तार को विस्तार विचलन भी कहा जाता है।]

$$(\text{अर्ध अन्तर चतुर्थक विस्तार} = 5)$$

$$(\text{अर्ध अन्तर चतुर्थक विस्तार गुणांक} = 0.11)$$

- 6 निम्नलिखित श्रेणी के लिए माध्य विचलन (माध्य से) की गणना कीजिए

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
आवृत्ति	5	8	15	16	6

$$(\text{माध्य विचलन} = 9.44)$$

- 7 निम्न आकड़ों से माध्य विचलन तथा प्रमाण विचलन ज्ञात कीजिए

आकार	10	11	12	13	14
आवृत्ति	3	12	18	12	3

$$(\text{माध्य विचलन} = 0.75)$$

$$(\text{प्रमाण विचलन} = 1)$$

- 8 निम्न आकड़ों से एक लारेंज वक्र (Lorenz curve) खींचिए

आय हजार ₹० में)	व्यक्तियों की संख्या (हजार में)	
	वर्ग 'क'	वर्ग 'ख'
10	8	15
20	7	6
40	5	2
50	3	1
80	2	1

- 9 निम्नलिखित आकड़ों में प्रमाप विचलन तथा विचरण गुणांक ज्ञात कीजिए

मजदूरी (₹० में)	पिनों की संख्या	मजदूरी (₹० में)	पिनों की संख्या
0-10	12	0-50	155
10-20	30	50-60	202
20-30	65	60-70	222
30-40	107	70-80	230

$$\left( \begin{array}{l} \sigma = 17.26 \\ CV = 42.7 \end{array} \right)$$

- 10 निम्न सारणी से समय विचलन और गुणांक को ज्ञात कीजिए

वर्ग	आवृत्ति	वर्ग	आवृत्ति
0-10	25	40-50	25
10-20	15	50-60	10
20-30	23	60-70	5
30-40	25	70-80	10

$$\left( \begin{array}{l} \sigma = 19.76 \\ CV = 56.2 \end{array} \right)$$

- 11 निम्न वितरण से विचरण गुणांक ज्ञात कीजिए

आयु वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40
जनसंख्या	10	12	24	32
आयु वर्ग	40-50	50-60	60-70	70-80
जनसंख्या	29	9	3	1

$$(CV = 43.64)$$

- 12 निम्न दो श्रेणियों से प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए और बताइए कि कौन सी श्रेणी में अपविकरण अधिक है ?

भार

(किलोग्राम में)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
श्रेणी 'क'	7	10	20	18	7
श्रेणी 'ख'	5	9	21	15	6

(श्रेणी "ख")

- 13 निम्न सारणी में विद्यार्थियों की ऊँचाई दी गई है। चतुर्थक विचलन और चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए

ऊँचाई (सैं० मी० म)	123	125	127	129	131	133
विद्यार्थियों की संख्या	24	22	26	24	14	22
ऊँचाई (सैं० मी० म)	135	137	139			
विद्यार्थियों की संख्या	24	20	24			

(Q D = 4 सैं० मी०)

(Coeff of Q D = 0.03)

- 14 निम्न आकड़ा से लघु विधि द्वारा प्रसार विचलन का परिकलन कीजिए। उस सूत्र को भी बताइए जिसका रूप प्रयोग करेंगे।

आयु (वर्षों म)	10-19	20-29	30-39	40-49
आयु (वर्षों म)	50-59	60-69	70-79	
आवृत्ति	531	19	4	

(σ = 1.15)

- 15 निम्न सारणी में दो वर्ग "क" और "ख" के वितरण की आय वितरण भी गई है। एक ही पैदाइश में उनकी साराज वर बनावट और व्याख्या कीजिए

आय x (हजार रु० में)	व्यक्तियों की संख्या (हजार म)	
	वर्ग 'क'	वर्ग 'ख'
10	8	15
20	7	6
40	5	2
50	3	1
80	2	1

(वर्ग 'ख' में अधिक असमानता)

## अध्याय 11

### यह सम्बन्ध

#### (CORRELATION)

#### सहसम्बन्ध का तात्पर्य (Meaning of Correlation)

व्यवहार में अनेक श्रेणियाँ ऐसी पाई जाती हैं जिनमें पारस्परिक सम्बन्ध होता है और जिनमें एक में परिवर्तन होने में दूसरी में भी परिवर्तन होता है। उदाहरण के लिए वस्तु की माँग और पूर्ति ऊँचाई और वजन पति की आयु और पत्नी की आयु, मुद्रा की मात्रा और मूल्य स्तर आदि। मान्यिकी के विशेषज्ञों ने दो (या दो से अधिक) चरों के बीच सम्बन्ध को एक ही अक्षर में व्यक्त करने के लिए एक उपकरण का निर्माण किया है जिसे सहसम्बन्ध (correlation) कहा जाता है। अतः सहसम्बन्ध दो या दो से अधिक सम्बन्धित चरों जैसे आय और व्यय, वस्तु की माँग व पूर्ति, मुद्रा की मात्रा और मूल्य स्तर आदि के पारस्परिक सम्बन्ध को बताता है।

#### धनात्मक व ऋणात्मक सहसम्बन्ध (Positive and Negative Correlation)

सहसम्बन्ध धनात्मक (Positive) या ऋणात्मक (Negative) हो सकता है। दो श्रेणियों के मूल्या में यदि एक दिशा में परिवर्तन हो रहा है जैसे, एक के मूल्यों में वृद्धि (या कमी) होने के फलस्वरूप दूसरी के मूल्यों में भी वृद्धि (या कमी) होती है तो ऐसे सहसम्बन्ध को धनात्मक सहसम्बन्ध कहेंगे। उदाहरण के लिए अर्थव्यवस्था के समान रहने पर यदि किसी वस्तु की माँग में वृद्धि होने से उसके मूल्य में वृद्धि होती है या माँग में कमी होने से उसके मूल्य में कमी होती है तो माँग और मूल्य का सहसम्बन्ध धनात्मक है। परन्तु जब दो सम्बन्धित श्रेणियों में से एक में परिवर्तन दूसरी में विपरीत दिशा में होता है—जैसे एक में वृद्धि (या कमी) होने से दूसरी में कमी (या वृद्धि) होती है तो ऐसी सहसम्बन्ध को ऋणात्मक सहसम्बन्ध कहेंगे। उदाहरण के लिए अर्थव्यवस्था के समान रहने पर जब किसी वस्तु की पूर्ति के वर्धन से उसके मूल्य में कमी होती है या उसकी पूर्ति में कमी होने से उसके मूल्य में वृद्धि होती है तो वस्तु की पूर्ति और उसके मूल्य के सहसम्बन्ध को ऋणात्मक सहसम्बन्ध कहेंगे।

#### सहसम्बन्ध मापन की विधियाँ (Methods of Measuring Correlation)

सहसम्बन्ध मापन की विभिन्न विधियों द्वारा यह पता लगाया जा सकता है कि दो (या दो से अधिक) चर मूल्यों में सहसम्बन्ध है या नहीं और यदि है तो उसकी मात्रा क्या है ?

ऊँचाई			
(सें० मी० म)	123	125	127
विद्यार्थियों की संख्या	24	22	26
ऊँचाई			
(सें० मी० म)	135	137	139
विद्यार्थियों की संख्या	24	20	24

(C)

- 14 निम्न आकड़ों से लघु विधि द्वारा प कीजिए। उस सूत्र को भी बताइए कि

आयु (वर्षों में)	10	19	20
आवृत्ति	3	4	1
आयु (वर्षों में)	50-59	60-69	70-79
आवृत्ति	531	412	287

- 15 निम्न सारणी में दो वर्गों का आय वितरण दी गई है। वनांक और मापों की

आय ₹  
(हजार रु० में)

---

10  
20  
40  
50  
80

---

## 2 काल पियसन का सहसम्बन्ध गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की यह विधि सबसे उत्तम है। इस विधि का प्रतिपादन काल पियसन (Karl Pearson) ने 1890 में किया था। इस विधि के लिए दिए गए सूत्र को प्रयोग करने के लिए 'X' व 'Y' श्रेणियाँ के मदा या मूल्यों का विचलन (Deviation) समांतर माध्य से लिया जाता है। कल्पित माध्य से विचलन लेने पर यह सूत्र प्रयोग नहीं हो सकता। सूत्र निम्नलिखित है

प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

$$r = \frac{\sum dx dy}{N \sigma_x \sigma_y} \text{ या } - \frac{\sum dx dy}{\sqrt{\sum dx^2 \sum dy^2}}$$

\*4 गुणांक

र) अर्थात् 'X' श्रेणी का समांतर माध्य से विचलन  
 अर्थात् 'Y' श्रेणी का समांतर माध्य से विचलन  
 + विचलन  
 विचलन

1

$$\frac{\sum x \times \sum dy}{N}$$

$$\sqrt{\sum dy^2} - \frac{(\sum dy)^2}{N}$$

माध्य से विचलन  
 से विचलन

वजन में काल पियसन (Karl P

17 10

5 16

य ज्ञात कीजिए।

[ X श्रेणी का समांतर माध्य  
 समांतर माध्य) से विचलन

21



सहसम्बन्ध मापन की प्रमुख विधियाँ निम्नलिखित हैं

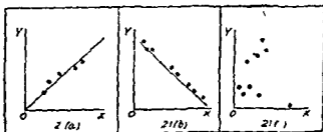
1 विक्षेप चित्र विधि (Scatter Diagram Method)

2 काल पियसन का सहसम्बन्ध गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

3 स्पियरमन का क्रम सहसम्बन्ध गुणांक (Spearman's Coefficient of Rank Correlation)

1 विक्षेप चित्र विधि (Scatter Diagram Method)

विक्षेप चित्र के द्वारा दो श्रेणियों के चर (Variables) में परस्पर सहसम्बन्ध की दिशा और मात्रा का पता चल जाता है। इस विधि के अनुसार अक्ष X पर स्वतंत्र चर (Independent Variable) का दिखाया जाना है और अक्ष Y पर आश्रित चर (Dependent Variable) का लिया जाता है। इस प्रकार दोनों श्रेणियों के दो मूल्यों के लिए बिंदु रेखा पत्र (Graph paper) पर एक बिंदु अंकित किया जाता है। इस प्रकार दोनों श्रेणियों के समस्त मूल्यों के लिए अनेक बिंदु अंकित कर लिये जाते हैं। इस प्रकार बिंदु रेखा पत्र पर अनेक बिंदु दिखाई देने लगते हैं। यदि सभी बिंदु बायीं ओर के कोने में दायीं ओर के ऊपर वाले कोने तक एक सीधी रेखा के रूप में अंकित हुए हों या उनकी प्रवृत्ति निश्चित रूप से इस ओर है तो दोनों श्रेणियों में धनात्मक सहसम्बन्ध (Positive Correlation) होता है जैसा कि चित्र (a) में दिखाया गया है। परंतु जब स्थिति इसके विपरीत होती है अर्थात् सभी बिंदु बायीं ओर के ऊपर वाले कोने से दायीं ओर के नीचे वाले कोने तक एक सीधी रेखा के रूप में अंकित होत हों या उनकी प्रवृत्ति निश्चित रूप से इस ओर है तो दोनों श्रेणियों में ऋणात्मक सहसम्बन्ध होता है जैसा कि चित्र (b) में दिखाया गया है। परंतु जब विक्षेप चित्र में बिंदु चारों ओर बिखरे होते हैं और उनमें कोई निश्चित प्रवृत्ति नहीं पाई जाती तो ऐसी परिस्थिति में सहसम्बन्ध का अभाव होता है या सहसम्बन्ध शून्य होता है जैसा कि चित्र (c) में दिखाया गया है।



रेखा चित्र 2।

## 2 काल पियसन का सहसम्बन्ध गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की यह विधि सबसे उत्तम है। इस विधि का प्रतिपादन काल पियसन (Karl Pearson) ने 1890 में किया था। इस विधि के लिए दिए गए सूत्र को प्रयोग करने के लिए 'X' व 'Y' श्रेणियों के मद्दा या मूल्यों का विचलन (Deviation) समांतर माध्य से लिया जाता है। कल्पित माध्य से विचलन लेने पर यह सूत्र प्रयोग नहीं हो सकता। सूत्र निम्नलिखित है

प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

$$r = \frac{\sum dx dy}{N \sigma_x \sigma_y} \text{ या } \frac{\sum dx dy}{\sqrt{\sum dx^2 \sum dy^2}}$$

जहाँ  $r$  = सहसम्बन्ध गुणांक

$dx = (X - \bar{X})$  अर्थात् 'X' श्रेणी का समांतर माध्य से विचलन

$dy = (Y - \bar{Y})$  अर्थात् 'Y' श्रेणी का समांतर माध्य से विचलन

$\sigma_x$  = श्रेणी X का प्रमाप विचलन

$\sigma_y$  = श्रेणी Y का प्रमाप विचलन

$N$  = मद्दों की संख्या

अप्रत्यक्ष विधि (Indirect Method)

$$r = \frac{\sum dx dy - \frac{\sum dx \times \sum dy}{N}}{\sqrt{\sum dx^2 - \frac{(\sum dx)^2}{N}} \times \sqrt{\sum dy^2 - \frac{(\sum dy)^2}{N}}}$$

जहाँ  $dx$  = श्रेणी X का कल्पित माध्य से विचलन

$dy$  = श्रेणी Y का कल्पित माध्य से विचलन

$N$  = मद्दों की संख्या

उदाहरण—1

निम्नलिखित आँकड़ा से सम्बन्धी और वजन में काल पियसन (Karl Pearson) का सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए

सम्बन्धी (इंचों में) X 3 4 6 7 10

वजन (औंसों में) Y 9 11 14 15 16

हल करने की विधि

1 श्रेणी X व Y की समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

2 श्रेणी X के मूल्यों की  $\bar{X}$  (अर्थात् X श्रेणी की समांतर माध्य) से तथा श्रेणी Y के मूल्यों की  $\bar{Y}$  (अर्थात् Y श्रेणी की समांतर माध्य) से विचलन लीजिए और इन्हें क्रमशः  $dx$  व  $dy$  से सम्बोधित कीजिए।

3 विचलनों का वग कर लीजिए और इन्हें क्रमश  $dx^2$  और  $dy$  में सम्बोधित कीजिए ।

4 प्रत्येक  $dx$  और  $dy$  को आपस में गुणा कीजिए और गुणनफल को  $dx dy$  का नाम दीजिए ।

5 सब कालमा का अलग-अलग योग कीजिए और इन योगों को क्रमश  $\Sigma x$ ,  $\Sigma dx$ ,  $\Sigma dx^2$ ,  $\Sigma dy$ ,  $\Sigma dy^2$  और  $\Sigma dx dy$  से सम्बोधित कीजिए ।

6 अंत में सूत्र को अपनाकर सहसम्बन्ध गुणांक पात कीजिए  
हल

सम्बाई	$(X-\bar{X})$		वजन	$(Y-\bar{Y})$		
x	dx	dx <sup>2</sup>	y	dy	dy <sup>2</sup>	dx dy
3	-3	9	9	-4	16	12
4	-2	4	11	-2	4	4
6	0	0	14	+1	1	0
7	+1	1	15	+2	4	2
10	+4	16	16	+3	9	12

$$\Sigma x = 30 \quad \Sigma dx = 0 \quad \Sigma dx^2 = 30 \quad \Sigma y = 65 \quad \Sigma dy = 0 \quad \Sigma dy^2 = 34 \quad \Sigma dx dy = 30$$

$$X \text{ श्रेणी की समांतर माध्य} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\text{अत} \quad \bar{X} = 6$$

$$y \text{ श्रेणी की समांतर माध्य} = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{65}{5} = 13$$

$$\text{अत} \quad \bar{Y} = 13$$

नाल विचलनों के सहसम्बन्ध गुणांक सूत्र का अरनाइए

$$\begin{aligned} r &= \frac{\Sigma dx dy}{\sqrt{\Sigma dx^2 \Sigma dy^2}} \\ &= \frac{30}{\sqrt{30 \times 34}} \\ &= \frac{30}{31.94} \\ &= 0.939 \end{aligned}$$

इसमें स्पष्ट है कि सम्बाई और वजन में उच्च घातात्मक सहसम्बन्ध है ।

## उदाहरण—2

निम्न सारणी से 'X' तथा 'Y' के मूल्यों में काल पियसन (Karl Pearson) का सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए।

X	20	18	16	15	14	12	12	10	8	5
Y	12	16	10	14	12	10	9	8	7	2

हल

उदाहरण एक म दी गई विधि के अनुसार हल कीजिए

x	(X- $\bar{X}$ ) dx	dx <sup>2</sup>	(Y- $\bar{Y}$ ) y	dy <sup>2</sup>	dxdy	
20	7	49	12	2	4	14
18	5	25	16	6	36	30
16	3	9	10	0	0	0
15	2	4	14	4	16	8
14	1	1	12	2	4	2
12	-1	1	10	0	0	0
12	-1	1	9	-1	1	1
10	-3	9	8	-2	4	6
8	-5	25	7	-3	9	15
5	-8	64	2	-8	64	64

$$\Sigma x = 130 \quad \Sigma dx = 0 \quad \Sigma dx^2 = 188 \quad \Sigma y = 100 \quad \Sigma dy = 0 \quad \Sigma dy^2 = 138 \quad \Sigma dxdy = 140$$

$$Y \text{ श्रेणी की समांतर माध्य} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{130}{10} = 13$$

$$\text{अतः} \quad \bar{X} = 13$$

$$Y \text{ श्रेणी की समांतर माध्य} = \frac{\Sigma y}{N} \\ = \frac{100}{10} = 10$$

$$\text{अतः} \quad \bar{Y} = 10$$

काल पियसन का सहसम्बन्ध गुणांक सूत्र का अपनाइए

$$r = \frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma dx^2 \Sigma dy^2}}$$

$$= \frac{140}{\sqrt{188 \times 138}}$$

$$= 0.869$$

### 5 स्पियरमन का क्रम सहसम्बन्ध गुणांक (Spearman's Coefficient of Rank Correlation)

क्रम-सहसम्बन्ध गुणांक (Coefficient of Rank Correlation) को ज्ञात करने की विधि का प्रतिदिन चार्ल्स स्पियरमैन (Charles Spearman) द्वारा किया गया था। सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की यह विधि कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) की विधि से बहुत सरल है। यह विधि श्रेणी के क्रम (Ranks) के आधार पर दी गई है। श्रेणी के पढा या मूल्यों के आकार के अनुसार उनके क्रमों को निर्दिष्ट किया जाता है। सबसे बड़े आकार या मूल्य का पहला क्रम (Rank) दिया जाता है, उससे छोटे को दूसरा, उससे छोटे को तीसरा, फिर चौथा पाँचवाँ इत्यादि। क्रम का विपरीत दिशा में भी दिया जा सकता है, जैसे श्रेणी के सबसे छोटे मूल्य का पहला क्रम दिया जाता है, उससे बड़े को दूसरा उससे बड़े का तीसरा क्रम दिया जाता है इत्यादि। परन्तु दो श्रेणियाँ में क्रम देने की क्रम व्यवस्था एक जैसी होना चाहिए। जब श्रेणी में कोई मूल्य एक से अधिक बार आ जाये जैसे मान सीजिए कि एक मूल्य तीन बार आया है तो इन तीन मूल्यों का औसत क्रम (Average rank) दिया जाता है अर्थात् इन तीनों मूल्यों के क्रम स्थानों का योग करने उसका तीनों पर भाग कर लिया जाता है और जो भागफल होगा वही क्रम उन तीनों मूल्यों का दिया जाता है।

क्रम सहसम्बन्ध गुणांक (Coefficient of Rank Correlation) का ज्ञात करने का सूत्र इस प्रकार है

$$R = 1 - \frac{6 \sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

जहाँ R = क्रम सहसम्बन्ध गुणांक

D = क्रम अंतर (Rank difference)

$\sum D^2$  = अंतरों के वर्गों का योग

N = श्रेणियों की संख्या (Pairs of observations)

अब हम इस सूत्र का उपयोग

द्वारा करते हैं

उदाहरण—3

निम्नलिखित

को देखें

1 36 56

1 50 35

## हल करने की विधि

1 X व Y श्रेणियों में मूल्यों का गम नीचे ।

2 X श्रेणी के क्रमा ( $R_1$ ) और Y श्रेणी के क्रमा ( $R_2$ ) का अंतर लीजिए और उन्हें D से सम्बोधित कीजिए ।

3 इन अंतरों (D) का वर्ग लीजिए और उनका D से सम्बोधित कीजिए ।

4  $D^2$  अर्थात् D के वर्गों का योग कर लीजिए और इनके योग को  $\Sigma D^2$  से सम्बोधित कीजिए ।

5 सूत्र अपनाकर गम महसूस प्र गुणांक का पात कीजिए जैसे कि नीचे दिखाया गया है

हल

X	$R_1$	Y	$R_2$	$R_1 - R_2$ D	D
36	7	50	6	1	1
56	3	35	9	6	36
20	9	70	3	6	36
65	1	25	10	9	81
42	6	58	5	1	1
33	8	75	2	6	36
44	5	60	4	1	1
50	4	45	7	3	9
15	10	80	1	9	81
60	2	28	8	6	36
-----					-----
N=10					$\Sigma D^2=318$

सूत्र का अपनाइए

$$\begin{aligned}
 R &= 1 - \frac{6 \Sigma D^2}{N(N^2 - 1)} \\
 &= 1 - \frac{6 \times 318}{10^3 - 10} \\
 &= 1 - \frac{1908}{990} \\
 &= 1 - 1.927 \\
 &= -0.927
 \end{aligned}$$

## उदाहरण—4

निम्नलिखित आकड़ा से X और Y में प्रम-सहसम्बन्ध गुणांक को ज्ञात कीजिए

X	60	34	40	50	45	41	22	43	22	66	64	46
Y	75	32	34	40	45	33	12	30	36	72	41	57

हल

उदाहरण 3 में दी गई विधि के अनुसार हल कीजिए

X	$R_1$	Y	$R_2$	$R_1 R_2$ D	$D^2$
60	3	75	1	2	4
34	11	32	10	1	1
40	10	34	8	2	4
50	4	40	6	-2	4
45	6	45	4	2	4
41	9	33	9	0	0
22	12	12	12	0	0
43	7	30	11	-4	16
42	8	36	7	1	1
66	1	72	2	-1	1
64	2	41	5	-3	9
46	5	57	3	2	4
-----					$\Sigma D^2 = 48$
$N = 12$					

चाहते हैं, स्पियरमन (Charles Spearman) का प्रम-सहसम्बन्ध गुणांक सूत्र का उपयोग करें।

$$\begin{aligned}
 R = 1 &= \frac{6 \Sigma D^2}{N(N^2 - 1)} \\
 &= 1 - \frac{6 \times 48}{12(12^2 - 1)} \\
 &= 1 - \frac{288}{1728 - 12} \\
 &= 1 - \frac{288}{1716} = \frac{119}{143} \\
 &= +0.832
 \end{aligned}$$

चर के समान मूल्यों को क्रम देने की विधि (Method of Ranking Equal Value of Variate)

उदाहरण—5

निम्न सारणी से X और Y के मूल्या में स्पीयरमैन (Spearman) का सह-सम्बन्ध जान लीजिए।

X	41	40	40	39	38	38	37	36	36	35
Y	80	79	78	77	77	76	76	75	72	65

हल .

जब दा या दा से अधिक मूल्य बराबर आकार में होते हैं तो उन्हें बराबर स्थान या क्रम दिया जाता है। यह क्रम औसत क्रम या स्थान होता है। उपरोक्त उदाहरण में X श्रेणी में मूल्य 40 दो बार आया है अतः 40 के दा क्रम हैं—2 और 3।

इसलिए इन्हें औसत क्रम दिया जायेगा जैसा कि  $\frac{2+3}{2} = 2.5$  है। अतः इन दो मूल्या

का क्रम (rank) 2.5 होगा। इसी प्रकार मूल्य 38 भी दो बार आया है और श्रेणी में मूल्य 38 का क्रम 5 और 6 है। अतः दोनों का औसत स्थान या क्रम

$\frac{5+6}{2} = 5.5$  होगा। मूल्य 36 जोकि दो बार आया है का औसत क्रम 8.5

होगा। इसी प्रकार हम Y श्रेणी के समान आकार वाले मूल्या को औसत क्रम देते हैं। निम्न सारणी में 'X' और 'Y' श्रेणियों के समान आकार वाले मूल्या का क्रम उपरोक्त विधि के अनुसार ही दिया गया है। सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की शेष विधि पहले जैसी ही है।

X	R <sub>1</sub>	Y	R <sub>2</sub>	R <sub>1</sub> - R <sub>2</sub> D	D <sup>2</sup>
41	1	80	1	0.0	0.00
40	2.5	79	2	0.5	0.25
40	2.5	78	3	-0.5	0.25
39	4	77	4.5	-0.5	0.25
38	5.5	77	4.5	1.0	1.00
38	5.5	76	6.5	-1.0	1.00
37	7	76	6.5	0.5	0.25
36	8.5	75	8	0.5	0.25
36	8.5	72	9	-0.5	0.25
35	10	65	10	0.0	0.00
N=10					$\Sigma D^2 = 3.50$



अव स्प्रियरमें के सहसम्बन्ध गुणांक सूत्र का अपनन्दए

$$\begin{aligned}
 R &= 1 - \frac{6 \sum D^2}{N(N^2 - 1)} \\
 &= 1 - \frac{6 \times 350}{10(10^2 - 1)} \\
 &= 1 - \frac{21}{1000 - 10} \\
 &= 1 - \frac{21}{990} \\
 &= \frac{969}{990} = +0.979
 \end{aligned}$$

### अभ्यास के लिए प्रश्न

1 निम्न आकड़ा से नियोजित पूजा तथा प्राप्त लाभ में सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए ।

नियोजित पूजा							
(हजार रु० में)	10	20	30	40	50	60	70
प्राप्त लाभ	2	4	8	5	10	15	14

नियोजित पूजा			
(हजार रु० में)	80	90	100
प्राप्त लाभ	20	22	30

$$(r = +0.96)$$

2 अथशास्त्र और इतिहास में परीक्षा देने वाले 10 छात्रों ने निम्नलिखित अंक प्राप्त किए हैं । इनमें सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए ।

अथशास्त्र	20	30	27	17	19	23	35
इतिहास	18	35	20	18	25	28	33
अथशास्त्र	13	16	38				
इतिहास	18	20	40				

$$(r = +0.856)$$

3 निम्नलिखित आकड़ा से काल वियसन का सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए

पतिषा की आयु	20	30	40	50	60	70	80
पतिनया की आयु	14	25	30	32	40	45	65

$$(r = +0.96)$$

4 निम्न आकड़ों से पत्नियों व पतियों की आयु सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञान कीजिए

पत्नियों की आयु	23	27	28	28	29	30
पत्नियों की आयु	18	20	22	27	21	29
पतियों की आयु	31	33	35	36		
पत्नियों की आयु	27	29	28	29		

$$(r = +0.82)$$

5 निम्न आकड़ों से चालस विवरण का क्रम-सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञान कीजिए

x	60	34	40	50	45	41	22	43
y	75	32	34	40	45	33	12	30
x	42	66	64	46				
y	36	72	41	57				

$$(R = +0.82)$$

6 निम्न आकड़ों से स्पीयरमैन का क्रम सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञान कीजिए

x	75	88	95	70	60	80	81	50
y	120	134	150	115	110	140	142	100

$$(R = 0.93)$$

7 निम्न आकड़ों से क्रम सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञान कीजिए

x	87	22	35	75	37
v	29	63	52	46	48

$$(R = -1)$$

अब स्पियरमैन के सहसम्बन्ध गुणांक सूत्र का अपनाने पर

$$\begin{aligned}
 R &= 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)} \\
 &= 1 - \frac{6 \times 350}{10(10^2-1)} \\
 &= 1 - \frac{21}{1000-10} \\
 &= 1 - \frac{21}{990} \\
 &= \frac{969}{990} = +0.979
 \end{aligned}$$

### अभ्यास के लिए प्रश्न

1 निम्न आकड़ों से नियोजित पूजा तथा प्राप्त लाभ में सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए।

नियोजित पूजा

(हजार रु० में)	10	20	30	40	50	60	70
प्राप्त लाभ	2	4	8	5	10	15	14

नियोजित पूजा

(हजार रु० में)	80	90	100
प्राप्त लाभ	20	22	30

$$(r = +0.96)$$

2 अथशास्त्र और इतिहास में परीक्षा देने वाले 10 छात्रों ने निम्नलिखित अंक प्राप्त किए हैं। इनमें सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए।

अथशास्त्र	20	30	27	17	19	23	35
इतिहास	18	35	20	18	25	28	33
अथशास्त्र	13	16	38				
इतिहास	18	20	40				

$$(r = +0.856)$$

3 निम्नलिखित आकड़ों से काल विषय का सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए

पतिव्या की आयु	20	30	40	50	60	70	80
पत्निका की आयु	14	25	30	32	40	45	65

$$(r = +0.96)$$

(4) सूचकांक अनेक प्रकार के अर्थ परिवर्तनों की जानकारी के लिए प्रयोग किये जाते हैं, जैसे जनसंख्या, कृषि एवं औद्योगिक उत्पादन, निर्यात और आयात। सूचकांक बनाने में समस्याएँ (Problems in the Construction of Index Numbers)

सूचकांक बनाने में अनेक समस्याएँ सामने आती हैं जोकि निम्नलिखित हैं

### (1) आधार वर्ष का चुनाव (Selection of the Base Year)

एक अच्छे आधार वर्ष का चुनाव बठिन होता है क्योंकि एक अच्छा आधार वर्ष वह होता है जिसमें कोई विषम घटना न घटी हो। आधार वर्ष का चुनाव सूचकांक बनाने के उद्देश्य पर बहुत कुछ निर्भर करता है। फिर भी इसके चुनाव में बड़ी सावधानी से कार्य करना चाहिए।

### (2) प्रतिनिधि वस्तुओं का चुनाव (Selection of Representative Goods)

सूचकांक बनाते समय हमारी दूसरी समस्या प्रतिनिधि वस्तुओं का चुनाव है। वस्तुओं का चुनाव भी सूचकांक बनाने के उद्देश्य पर निर्भर करता है। उदाहरण के लिए यदि हम श्रमिकों के रहन-सहन व्यय में परिवर्तन को मापने के लिए सूचकांक बनाना चाहते हैं तो हमें ऐसी वस्तुओं को छानना पड़ेगा जो अधिकतर या उस श्रम वर्ग द्वारा उपभोग की जाती हैं। इससे स्पष्ट है कि प्रतिनिधि वस्तुओं के चुनाव में कठिनाई होती है।

### (3) प्रतिनिधि मूल्यों का चुनाव (Selection of Representative Prices)

इस सम्बन्ध में हमारी तीसरी समस्या प्रतिनिधि मूल्यों को मापना करना है। वस्तुओं के मूल्य किस बाजार से लिए जाएं, क्या यह थोक मूल्य (Wholesale Prices) हों या फुटकर मूल्य (Retail Prices) हों? इत्यादि समस्याएँ हैं। इन समस्याओं का समाधान भी सूचकांक के उद्देश्य से प्रभावित होता है।

### (4) वस्तुओं को भार देना (Attaching Weightage)

भारित सूचकांक मापना करने के लिए हम वस्तुओं को भार या महत्त्व देना पड़ता है। कितना भी प्रयत्न क्या न किया जाय, प्रत्येक दशा में वस्तुओं को दिया गया भार यथायत्न होकर अनुमानजनक ही होता है, क्योंकि व्यक्तियों की रुचियाँ में परिवर्तन होता रहता है और परिवर्तनों के साथ ही वस्तुओं का भार महत्त्व भी बदलता रहता है। इस प्रकार वस्तुओं को भार देना एक जटिल है।

### (5) माध्य या औसत का चुनाव (Selection of Sustainable Average)

हमारी अन्तिम समस्या यह है कि सूचकांक की रचना में किस माध्य का जाय। व्यवहार में हरात्मक माध्य तथा न्युयिष्ठक सूचकांक की रचना नहीं होती। भ्रष्टका का प्रयोग भी बहुत कम किया जाता है। गुणोत्तर

## सूचकांक

### (INDEX NUMBERS)

#### सूचकांक की परिभाषा (Definition of Index Numbers)

सूचकांक एक विशेष प्रकार का माध्य है जो प्रतिशतता में व्यक्त किया जाता है। सूचकांक की सहायता से हम काल श्रेणी (Time Series) और स्थान श्रेणी (Spatial Series) की केंद्रीय प्रवृत्ति (Central Tendency) का मापन कर सकते हैं। सूचकांक समूह के सापेक्षिक परिवर्तना (Relative Changes) को प्रकट करते हैं। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि सूचकांक काल श्रेणी और स्थान श्रेणी में हुए औसत परिवर्तनों को सापेक्ष रूप से प्रकट करते हैं। स्पेगल (Speegal) ने सूचकांक की परिभाषा इस प्रकार दी है "सूचकांक एक सांख्यिकीय माप है जो समय, स्थान या किसी अन्य विशेषता के आधार पर किसी चर मूल्य या सम्बन्धित चर मूल्यों में हानि वाले परिवर्तनों को प्रकट करता है।"

#### सूचकांक का महत्व (Importance of Index Number)

अर्थशास्त्र में सूचकांक का अत्यधिक महत्व है। इनका प्रयोग अर्थशास्त्र के अनेक क्षेत्रों जैसे उत्पादन, व्यापार, मूल्य आदि में होता है। उदाहरण के लिए सूचकांक सामान्य मूल्य स्तर में होने वाले परिवर्तनों का मापन करते हैं जिसके आधार पर वेतन, महंगाई भत्ता आदि निर्दिष्ट किये जाते हैं। सूचकांक की सहायता से उत्पादन, राष्ट्रीय आय, व्यापार इत्यादि में होने वाले परिवर्तना का भी पता चल जाता है और भविष्य में होने वाले परिवर्तना का भी अनुमान लगाया जा सकता है। इसीलिए सूचकांक को आर्थिक वायुमापक (Economic Barometer) भी कहा जाता है।

सूचकांकों के महत्व का ज्ञान इनके निम्नलिखित प्रयोगों से हो जाता है

(1) सामान्य मूल्य सूचकांक सरकार को एक उचित नीति बनाने में सहायता करते हैं।

(2) निर्वाह लागत सूचकांक (Cost of Living Index Number) वेतन निर्दिष्ट करने तथा श्रम के वेतन व महंगाई भत्ते सम्बन्धित झगडा (Labour disputes) को मुझमान में सहायता करते हैं।

(3) सूचकांक काल श्रेणी में हुए परिवर्तनों को सरल रूप से प्रकट करते हैं और इनकी सहायता से भविष्य में होने वाले परिवर्तना का अनुमान लगाया जा सकता है।

(4) सूचकांक अनेक प्रकार के अलग परिवर्तनों की जानकारी के लिए प्रयोग किये जाते हैं, जैसे जनसंख्या, वृत्ति एवं औद्योगिक उत्पादन, निर्मात और आयत। सूचकांक बनाने में समस्याएँ (Problems in the Construction of Index Numbers)

सूचकांक बनाने में अनेक समस्याएँ सामने आती हैं जोकि निम्नलिखित हैं

#### (1) आधार वर्ष का चुनाव (Selection of the Base Year)

एक अच्छे आधार वर्ष का चुनाव कठिन होता है क्योंकि एक अच्छा आधार वर्ष यह होता है जिसमें कोई विषय न घटता न बढ़े हो। आधार वर्ष का चुनाव सूचकांक बनाने में उद्देश्य पर बहुत कुछ निर्भर करता है। फिर भी इसमें चुनाव में बड़ी सावधानी से काम करना चाहिए।

#### (2) प्रतिनिधि वस्तुओं का चुनाव (Selection of Representative Goods)

सूचकांक बनाने समय हमारी दूरी समस्या प्रतिनिधि वस्तुओं का चुनाव है। वस्तुओं का चुनाव भी सूचकांक बनाने में उद्देश्य पर निर्भर करता है। उदाहरण के लिए यदि हम श्रमिकों के रहन सहन खर्च में परिवर्तन को मापने के लिए सूचकांक बनाना चाहते हैं तो हम ऐसी वस्तुओं को छूटना चढ़ेंगे जो अधिकतम उत भ्रम वर्ग द्वारा उपभोग की जाती है। इसमें स्पष्ट है कि प्रतिनिधि वस्तुओं का चुनाव में कठिनाई होती है।

#### (3) प्रतिनिधि मूल्यों का चुनाव (Selection of Representative Prices)

इस सम्बन्ध में हमारी तीसरी समस्या प्रतिनिधि मूल्यों को मापना करना है। वस्तुओं के मूल्य किस बाजार से लिए जाएं, क्या यह थोक मूल्य (Wholesale Prices) हैं या फुटकर मूल्य (Retail Prices) हैं? इत्यादि समस्याएँ हैं। इन समस्याओं का समाधान भी सूचकांक में उद्देश्य से प्रभावित होता है।

#### (4) वस्तुओं को भार देना (Attaching Weightage)

गारिष्ठ सूचकांक मापना करने के लिए हमें वस्तुओं को भार या महत्व देना पड़ता है। जिसका भी प्रयत्न क्या न किया जाए, प्रत्येक दशा में वस्तुओं को दिया गया भार समान ही होकर अनुमानजनक ही होता है, क्योंकि व्यक्तिगत रूपियों में परिवर्तन होता रहता है और परिवर्तनों के साथ ही वस्तुओं का भार या महत्व भी बदलता रहता है। इस प्रकार वस्तुओं को भार देना एक जटिल समस्या है।

#### (5) उपयुक्त माध्य या औसत का चुनाव (Selection of Suitable Average)

हमारी अंतिम समस्या यह है कि सूचकांक की रचना में किस माध्य का प्रयोग किया जाये। व्यवहार में हारमनिक तथा भूमिष्ठ सूचकांक की रचना में प्रयोग नहीं होते। गणना का प्रयोग भी बहुत कम किया जाता है। गुणोत्तर

माध्य सूचकांक की रचना में सर्वश्रेष्ठ माना जाता है परंतु गुणोत्तर माध्य की गणना त्रिया बति कठिन है। अतः व्यवहार में इसका प्रयोग भी कम होता है। इसलिए व्यवहार में समान्तर माध्य का प्रयोग अधिक होता है परंतु समान्तर माध्य श्रेणी के असाधारण व सीमांत मूल्यों (Extreme items) से अधिक प्रभावित होता है।

**सूचकांक निर्माण की विधियाँ (Methods of Construction of Index Numbers)**

सूचकांक दो प्रकार के होते हैं

(क) साधारण या अभांरित सूचकांक (Simple or unweighted index numbers) और

(ख) भांरित सूचकांक (Weighted index numbers)

साधारण सूचकांक में सभी वस्तुओं का समान भांर या महत्त्व दिया जाता है जब कि भांरित सूचकांक में विभिन्न वस्तुओं से सम्बन्धित भांरों को ध्यान में रखकर सूचकांक का निर्माण किया जाता है।

सूचकांक निर्माण की निम्नलिखित विधियाँ हैं

(क) साधारण समूह विधि (Simple Aggregative Method)

साधारण या अभांरित समूह विधि में सूचकांक बनाने के लिए वर्तमान वर्ष के मूल्यों के योग को आधार वर्ष के मूल्यों के योग से भांर दिया जाता है और इस अनुपात को 100 से गुणा कर दिया जाता है। सूत्र निम्नलिखित है

$$Po_1 = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100$$

जहाँ  $Po_1$  = वर्तमान वर्ष का मूल्य सूचकांक

$\sum P_1$  = वर्तमान वर्ष के मूल्यों का योग

$\sum P_0$  = आधार वर्ष के मूल्यों का योग

उदाहरण

निम्नलिखित आकड़ा में 1971 को आधार मान कर 1976 के लिए सूचकांक पात कीजिए

वस्तुएँ	इकाई	1971 में मूल्य (₹० में)	1976 में मूल्य (₹० में)
गेहूँ	प्रति 40 किलो	40	60
चावल	प्रति 40 किलो	60	90
दाल	प्रति किलो	2	4
घी	प्रति किलो	10	15
खीनी	प्रति किलो	4	5
इधन	प्रति 40 किलो	10	12

हल

गणना के पद

(1) आधार वर्ष में विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों ( $P_0$ ) का योग कर लीजिए और इसे  $\Sigma P_0$  से सम्बाधित कीजिए।

(2) वर्तमान वर्ष में विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों ( $P_1$ ) का योग कर लीजिए और इसे  $P_1$  से सम्बाधित कीजिए।

(3)  $\Sigma P_1$  को  $\Sigma P_0$  से भाग दीजिए और प्राप्त अनुपात को 100 से गुणा कीजिए।

### मूल्य सूचकांक की रचना

वस्तुएँ	इकाई	1971 में मूल्य (₹० में) ( $P_0$ )	1976 में मूल्य (₹० में) ( $P_1$ )
गेहूँ	प्रति 40 किलो	40	60
चावल	प्रति 40 किलो	60	90
दाल	प्रति किलो	2	4
घी	प्रति किलो	10	15
चीनी	प्रति किलो	4	5
इधन	प्रति 40 किलो	10	12
		$\Sigma P_0 = 126$	$\Sigma P_1 = 186$

सूत्र के अनुसार—

$$\begin{aligned}
 P_{01} &= \frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0} \times 100 \\
 &= \frac{186}{126} \times 100 \\
 &= 147.6
 \end{aligned}$$

अतः साधारण समूह सूचकांक = 147.6

अर्थात् 1971 की तुलना में 1976 में वस्तुओं के मूल्य में 47.6 प्रतिशत वृद्धि हुई है।

(ख) साधारण मूल्यानुपात माध्य विधि (Simple Average of Price Relative Method)

इस विधि के अनुसार पहले विभिन्न वस्तुओं या मदों के मूल्यानुपात ज्ञात



आधार वष के मूल्य से भाग दिया जाता है और 100 से गुणा किया जाता है जम  
 $\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)$  तत्पश्चात् सभी वस्तुओं के मूल्यानुपात के योग को उनकी  
 मग्था से भाग दिया जाता है जमाकि निम्न सूत्र से स्पष्ट है

$$\text{साधारण मूर्य अनुपात सूचकांक (P.O.)} = \frac{\sum \left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)}{N}$$

जहाँ  $\sum \left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)$  = वस्तुओं के मूर्यानुपाता का योग

N = वस्तुओं की संख्या

### उदाहरण—2

निम्न आकड़ों से 1971 का आधार वष मान कर 1976 के लिए मूल्य  
 अनुपात विधि द्वारा सूचकांक ज्ञात कीजिए ।

वस्तुएं	इकाई	1971 म मूल्य (₹० म)	1976 म मूल्य (₹० म)
गेहूँ	प्रति 40 किलो	40	60
चावल	प्रति 40 किलो	60	90
दाल	प्रति किलो	2	4
घी	प्रति किला	10	15
चीनी	प्रति किलो	4	5
इधन (कोयला)	प्रति 40 किलो	10	12

हल

साधारण मूल्यानुपात विधि द्वारा सूचकांक

वस्तुएँ	इकाई	1971 म मूल्य (₹० म) $P_0$	1976 मे मूल्य (₹० म) $P_1$	मूल्यानुपात $\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)$
गेहूँ	प्रति 40 किलो	40	60	$\frac{60}{40} \times 100 = 150$
चावल	प्रति 40 किलो	60	90	$\frac{90}{60} \times 100 = 150$

दाल	प्रति किलो	2	4	$\frac{4}{2} \times 100 = 200$
घी	प्रति किलो	10	15	$\frac{15}{10} \times 100 = 150$
चीनी	प्रति किलो	4	5	$\frac{5}{4} \times 100 = 125$
इधन (कायला)	प्रति 40 किलो	10	12	$\frac{12}{10} \times 100 = 120$
यहाँ	$N=6$			$\Sigma \left( \frac{P_1}{P_0} \times 100 \right) = 895$

सूच के अनुसार

साघरण मूरयानुपात सूचकांक

$$(P_{01}) = \frac{\Sigma \left( \frac{P_1}{P_0} \times 100 \right)}{N}$$

$$\text{अतः } P_{01} = \frac{895}{6} \\ = 149.2$$

अर्थात् 1971 की तुलना में 1976 में वस्तुओं के मूल्य में 49.2 प्रतिशत की वृद्धि हुई है।

(ग) भारित समूह विधि (Weighted Aggregative Method)

इस विधि को भारित समूह व्यय विधि (Aggregative expenditure method) भी कहा जाता है। भारित समूह विधि द्वारा सूचकांक निर्माण के लिए अनेक सांख्यिकारों (Statisticians) ने अपने-अपने सूत्र दिए हैं। परंतु हम बेसल लस्पेरेस (Laspeyres) द्वारा दी गई विधि का ही अध्ययन करेंगे क्योंकि यह विधि अधिक प्रयोग में लाई जाती है। इस विधि में अलग-अलग प्रकार के वस्तुओं की मात्रा को भार (Weight) माना जाता है और उस  $P_0$  से सम्बन्धित किया जाता है। भारित समूह सूचकांक ज्ञात करने के लिए लस्पेरेस द्वारा दिया गया सूत्र निम्नलिखित है

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1 Q_{01}}{\Sigma P_0 Q_0} \times 100$$

जहाँ  $P_{01}$  = भारत समूह सूचकांक

$Q_0$  = आधार वष में वस्तुओं की मात्रा (या भार)

$P_0$  = आधार वष में वस्तुओं के मूल्य

$P_1$  = वर्तमान वष में वस्तुओं के मूल्य

उदाहरण—3

निम्नलिखित आँकड़ा से निम्नलिखित विधि से अनुमान 1971 वष के आधार मान वर 1977 के लिए भारत समूह सूचकांक ज्ञात कीजिए

वस्तुएँ	मात्रा (भार)	1971 में मूल्य (₹० में)	1977 में मूल्य (₹० में)
क	14	6	12
ख	10	15	18
ग	7	12	24
घ	8	9	12
ङ	6	10	15

हल

गणना के पद

1. आधार वष में वस्तु के मूल्य ( $P_0$ ) को आधार वष में वस्तु की मात्रा ( $Q_0$ ) से गुणा करके  $P_0 Q_0$  प्राप्त कर लीजिए।

2. वर्तमान वष में वस्तु के मूल्य ( $P_1$ ) का आधार वष में वस्तु की मात्रा ( $Q_0$ ) से गुणा करके  $P_1 Q_0$  प्राप्त कीजिए फिर उनका योग करके  $\sum P_1 Q_0$  प्राप्त कीजिए।

3.  $\sum P_1 Q_0$  का  $\sum P_0 Q_0$  से भाग दीजिए और भागफल को 100 से गुणा करके भारत समूह सूचकांक ज्ञात कीजिए।

भारत समूह सूचकांक का निर्माण (Construction of Weighted Aggregative Index Numbers)

वस्तुएँ	मात्रा (भार) $Q_0$	1971 में मूल्य (₹० में) $P_0$	1976 में मूल्य (₹० में) $P_1$	$P_0 Q_0$	$P_1 Q_0$
क	14	6	12	84	168
ख	10	15	18	150	180
ग	7	12	24	84	168
घ	8	9	12	72	96
ङ	6	10	15	60	90
				$\sum P_0 Q_0 = 450$	$\sum P_1 Q_0 = 702$

सूचक के अनुसार

$$\begin{aligned} \text{भारित समूह सूचकांक (P_{01})} &= \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100 \\ &= \frac{702}{450} \times 100 \\ &= 156 \end{aligned}$$

अर्थात् 1971 की तुलना में 1977 में वस्तुओं के मूल्य में 36 प्रतिशत की वृद्धि हुई है

(ब) मूल्यानुपातों का भारित माध्याविधि (Weighted Average of Price Relative Method)

इस विधि के अंतर्गत सबसे प्रथम प्रत्येक वस्तु के मूल्य का मूल्यानुपात (price relative) को ज्ञात कीजिए

$$\text{मूल्यानुपात} = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

इसके पश्चात् प्रत्येक वस्तु के मूल्यानुपात को उसके भार ( $p_0 q_0$ ) से गुणा करके प्रत्येक वस्तु का  $\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right) \times p_0 q_0$  ज्ञात कीजिए। फिर इन सब का योग करके  $\sum \left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right) \times p_0 q_0$  को प्राप्त कीजिए। अतः में  $\sum \left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right) \times p_0 q_0$  को  $\sum p_0 q_0$  पर भाग देकर मूल्यानुपात का भारित माध्य सूचकांक प्राप्त कीजिए। सूत्र निम्नलिखित है।

$$P_{01} = \frac{\sum \left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right) \times p_0 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

$$\text{उपरोक्ता मूल्य सूचकांक} = \frac{\sum PV}{\sum V}$$

जहाँ

$P$  = वस्तु के मूल्य का मूल्यानुपात

अर्थात्  $\frac{P_1}{P_0} \times 100$

$V$  =  $p_0 q_0$

$$\sum PV = \sum \left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right) \times p_0 q_0$$

निम्नलिखित आँकड़ों से मूल्यानुपातो का भारित माध्य लेकर सूचकांक ज्ञात कीजिए

वस्तुएँ	मात्रा (भार)	1971 में मूल्य (₹० में)	1976 में मूल्य (₹० में)
क	14	6	12
ख	10	15	18
ग	7	12	24
घ	8	9	12
ङ	6	10	15

हल

मूल्यानुपातो का भारित माध्य द्वारा सूचकांक निर्माण

वस्तुएँ	मात्रा (भार)	1971 में मूल्य (₹० में)	1976 में मूल्य (₹० में)	$P_0Q_0$	$P_1P_0 \times 100$	$P_1/P_0 \times 100 \times P_0Q_0$ PV
	$q_0$	$P_0$	$P_1$	V	P	
क	14	6	12	84	$\frac{12}{6} \times 100 = 200$	16 800
ख	10	15	18	150	$\frac{18}{15} \times 100 = 120$	18 000
ग	7	12	24	84	$\frac{24}{12} \times 100 = 200$	16,800
घ	8	9	12	72	$\frac{12}{9} \times 100 = \frac{400}{3}$	9,600
ङ	6	10	15	60	$\frac{15}{12} \times 100 = 150$	9,000
				$\Sigma P_0Q_0 = 450$	$\Sigma P_1/P_0 \times 100 \times P_0Q_0 = 70200$	
				$\Sigma V = 450$ या	$\Sigma P = 70200$	

उपरोक्त सूत्र के अनुसार

$$\text{मूल्यानुपाता का भारित माध्य सूचकांक } (P_{01}) = \frac{\Sigma \frac{P_1}{P_0} \times 100 \times \Sigma P_0Q_0}{\Sigma P_0Q_0}$$

अथवा

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sum PV}{\sum V} \\
 &= \frac{70200}{450} \\
 &= 156
 \end{aligned}$$

व्याहरण—5

निम्नलिखित आँकड़ों से उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का निर्माण कीजिए

वस्तुएँ	मात्रा (भार)	इकाई	1971 में मूल्य (₹० में)	1973 में मूल्य (₹० में)
आटा	30	प्रति किलो	1 00	1 50
चावल	15	प्रति किलो	2 00	3 00
दाल	2	प्रति किलो	2 00	4 00
घी	5	प्रति किलो	10 00	15 00
चीनी	7	प्रति किलो	3 00	5 00

हल

भारत समूह विधि द्वारा उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का निर्माण कीजिए :

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का निर्माण

वस्तुएँ	मात्रा (भार)	इकाई	1971 में मूल्य (₹० में)	1973 में मूल्य (₹० में)	$P_0 Q_0$	$P_1 Q_0$
	$Q_0$		$P_0$	$P_1$		
आटा	30	प्रति किलो	1 00	1 50	30 00	45 00
चावल	15	प्रति किलो	2 00	3 00	30 00	45 00
दाल	2	प्रति किलो	2 00	3 00	4 00	6 00
घी	5	प्रति किलो	10 00	15 00	50 00	75 00
चीनी	7	प्रति किलो	3 00	5 00	21 00	35 00

$$\begin{aligned}
 &\sum P_0 Q_0 \quad \sum P_1 Q_0 \\
 &= 135 \quad = 206
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उपभोक्ता मूल्य सूचकांक} &= \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100 \\ &= \frac{206}{135} \times 100 \\ &= 152.6 \end{aligned}$$

अर्थात् 1971 की तुलना में 1973 में उपभोक्ता मूल्य सूचकांक में 52.6 प्रतिशत की वृद्धि हुई।

### अभ्यास के लिए प्रश्न

- 1 सूचकांक की परिभाषा कीजिए। इनके निर्माण में कौन-कौन सी समस्याएँ आती हैं?
- 2 सूचकांक के महत्व का उल्लेख कीजिए।
- 3 सूचकांक किस प्रकार बनाये जाते हैं? सूचकांक में भार प्रदान करने का क्या महत्व है?
- 4 निम्न आंकड़ा से (क) अरल समूह विधि द्वारा तथा (ख) मूल्यानुपात माध्य विधि द्वारा—सूचकांक ज्ञात कीजिए।

वस्तुएँ	1974 में मूल्य (₹० में)	1975 में मूल्य (₹० में)
क	40	50
ख	60	60
ग	20	30
घ	50	70
ङ	80	90
च	100	100

( $P_{01}$  = (क) 117, (ख) 122.9)

- 5 निम्न आंकड़ा में लेस्परेस विधि द्वारा सूचकांक ज्ञात कीजिए

वस्तुएँ	मात्रा	आधार वर्ष 1975 में मूल्य (₹० में)	प्रचलित वर्ष 1976 में मूल्य (₹० में)
क	20	4	6
ख	15	3	5
ग	25	2	3
घ	10	5	5





9 निम्न आंकड़ा स 1977 के लिए 1971 को आधार मानकर मूल्यानुपात के भारत माध्य सूचकांक ज्ञात कीजिए

वस्तुएँ	भार	मूल्य (1971) प्रति इकाई (₹० मे)	मूल्य (1977) प्रति इकाई (₹० म)
क	40	16 00	20 00
ख	25	40 00	60 00
ग	5	0 50	0 50
घ	20	5 25	6 25
ङ	10	2 00	1 50

( $P_{01} = 154.80$ )

10 निम्न आंकड़ा स 1978 के लिए साधारण मूल्य अनुपात माध्य सूचकांक ज्ञात कीजिए

वस्तुएँ	इकाई	मूल्य (1976) (₹० म)	मूल्य (1978) (₹० मे)
गेहूँ	प्रति क्विंटल	140	160
चावल	प्रति क्विंटल	340	560
दाल	प्रति क्विंटल	250	375
घी	प्रति किलो	8	12
चीनी	प्रति किलो	2	4
साना	प्रति ग्राम	60	65

( $P_{01} = 121.46$ )

11 निम्न आंकड़ा स 1971 के लिए 1970 का आधार वष मानकर साधारण मूल्यानुपात सूचकांक ज्ञात कीजिए

वस्तुएँ	मूल्य (₹० मे) 1970	मूल्य (₹० मे) 1971
क	100	100
ख	10	9
ग	5	4
घ	4	2
ङ	1	1
च	2	2.50
छ	3	3.25

( $P_{01} = 93.3$ )

परिशिष्ट  
सांख्यिकीय माप-सूत्र  
(FORMULAE)

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (Measures of Central Tendency)

(1) समांतर माध्य (Arithmetic Mean)

(क) व्यक्तिगत श्रृंखलाएँ (Individual Series)

(1) प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

= जहाँ  $\bar{X}$  = समांतर माध्य

$\sum X$  = समस्त मदा का योगफल

$N$  = मदा की संख्या

(2) लघु विधि (Short Cut Method)

$$\bar{X} = a \pm \frac{\sum d}{N}$$

जहाँ  $a$  = कल्पित माध्य

$d$  =  $a$  से एक चर का विचलन जैसे  $x - a$

$\sum d$  = विचलनों का शुद्ध योग

(ख) विच्छिन्न व अविच्छिन्न श्रृंखलाएँ (Discrete and Continuous Series)

(1) प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

जहाँ  $\sum fx$  = चर और उसकी आवृत्ति के गुणनफल का योग

$\sum f$  = कुल आवृत्तियों का योग

(2) लघु विधि (Short Cut Method)

$$\bar{X} = a \pm \frac{\sum fd}{\sum f}$$

जहाँ  $a$  = कल्पित माध्य

$\Sigma fd$  = आवृत्ति और सगत विचलनों के गुणनफलों का योग

$\Sigma f$  = आवृत्तियाँ का योग

(iii) पद विचलन विधि (Step Deviation Method)

$$\bar{X} = a \pm \frac{\Sigma fd'}{\Sigma f} \times i$$

$$\text{जहाँ } d' = \frac{x - a}{i}$$

$i$  = वर्ग विस्तार (Class interval)

Weighted Mean

$$\bar{X}_W = \frac{\Sigma XW}{\Sigma W}$$

जहाँ  $\bar{X}_W$  = भारित माध्य

$\Sigma XW$  = चला और उनके भार के गुणनफल का योग

$\Sigma W$  = भार का योग

(2) मध्यका (Median)

(क) व्यक्तिगत श्रृंखलाएँ (Individual Series)

$$(i) \text{ मध्यका} = \frac{n+1}{2} \text{ वाँ मद का आकार}$$

जहाँ  $n$  = मदों की संख्या

$$(ii) \text{ प्रथम चतुष्क (} Q_1 \text{)} = \frac{n+1}{4} \text{ वाँ मद का आकार}$$

$$(iii) \text{ तृतीय चतुष्क (} Q_3 \text{)} = \left( \frac{3(n+1)}{4} \right) \text{ वाँ मद का आकार}$$

नोट—व्यक्तिगत और विच्छिन्न श्रृंखलाओं में मध्यका का सूक्ष्म ज्ञान करने  $\frac{n+1}{2}$  के लिए का प्रयोग किया जाता है जबकि अविच्छिन्न श्रृंखलाओं में  $\frac{n}{2}$  का प्रयोग किया जाता है।

(ख) सामूहिक आँकड़ों या विच्छिन्न अविच्छिन्न श्रृंखलाएँ

$$(i) \text{ मध्यका} = l_1 + \frac{\frac{n}{2} - C}{f} (l_2 - l_1)$$

जहाँ  $\frac{n}{2}$  = मध्य पद

$I_1$  = मध्यवर्ग वर्ग की निम्न सीमा,

$I_2$  = मध्यवर्ग वर्ग की उच्च सीमा

$f$  = मध्यवर्ग वर्ग की आवृत्ति

$C$  = मध्यवर्ग वर्ग से पहले वर्ग की संचयी आवृत्ति

$$(ii) \text{ प्रथम चतुर्थांश } (Q_1) = I_1 + \frac{\frac{n}{4} - C}{f} (I_2 - I_1)$$

$$(iii) \text{ तृतीय चतुर्थांश } (Q_3) = I_1 + \frac{\frac{3n}{4} - C}{f} (I_2 - I_1)$$

$$(iv) \text{ द्वितीय दशमक } (D_2) = I_1 + \frac{\frac{2n}{10} - C}{f} (I_2 - I_1)$$

$$(v) \text{ द्वितीय शतमक } (P_2) = I_1 + \frac{\frac{2n}{100} - C}{f} (I_2 - I_1)$$

### (3) भूयिष्ठक (Mode)

#### (i) व्यक्तिगत व विच्छिन्न श्रृंखला (Individual and Discrete Series)

व्यक्तिगत श्रृंखला में भूयिष्ठक वह मद हाती है जो उसमें सबसे अधिक बार पाया जाता है। विच्छिन्न श्रृंखला में भूयिष्ठक उस मद में स्थित होता है जिसकी आवृत्ति अधिकतम होगी। इसका समूहीकरण विधि से ज्ञात किया जाता है।

#### (ii) अविच्छिन्न श्रृंखला (Continuous Series)

$$\text{भूयिष्ठक} = I_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} (I_2 - I_1)$$

जहाँ  $I_1$  = भूयिष्ठक वर्ग की निम्न सीमा

$I_2$  = भूयिष्ठक वर्ग की उच्च सीमा

$f_1$  = भूयिष्ठक वर्ग की आवृत्ति

$f_0$  = भूयिष्ठक वर्ग से पहले वर्ग की आवृत्ति

$f_2$  = भूयिष्ठक वर्ग के बाद के वर्ग की आवृत्ति

(-) अथवा

$$\text{भूयिष्ठक} = I_1 + \frac{\Delta I}{\Delta I + \Delta_2} \times h$$

जहाँ  $I_1$  = भूयिष्ठक वर्ग की निम्न सीमा

$\Delta I$  = भूयिष्ठक वर्ग और उससे पहले वर्ग की आवृत्तियों का अंतर

$\Delta 2 =$  भूमिष्ठक वर्ग और उसके बाद के वर्ग की आवृत्तियाँ या अंतर  
 $h =$  भूमिष्ठक वर्ग विस्तार

व्यपकरण या विशेषण के माप (Measures of Dispersion)

### 1 विस्तार (Range)

व्यक्तिगत, विच्छिन्न एवं अर्ध-निरन्तर श्रृंखला (Individual, Discrete and Continuous Series)

$$\text{विस्तार (Range)} = L - S$$

जहाँ  $L =$  अधिकतम सद्य

$S =$  न्यूनतम सद्य

$$\text{विस्तार गुणांक (Coefficient of Range)} = \frac{L - S}{L + S}$$

### 2 चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)

$$\text{चतुर्थक विचलन (Q D)} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$\text{चतुर्थक गुणांक (Coefficient of Q D)} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

### 3 माध्य विचलन (Mean Deviation)

(i) व्यक्तिगत श्रृंखला (Individual Series)

$$\text{माध्य विचलन (M D)} = \frac{\sum |dx|}{N}$$

(समांतर माध्य से)

जहाँ  $|dx| =$  समांतर माध्य से विचलन (+) या (-) चिह्न छोड़कर

$$\text{माध्य विचलन (M D)} = \frac{\sum |dm|}{N}$$

(मध्यका से)

जहाँ  $|dm| =$  मध्यका से विचलन (+) या (-) चिह्न छोड़कर

$$\text{माध्य विचलन (M D)} = \frac{\sum |dz|}{N}$$

(भूमिष्ठक से)

जहाँ  $|dz| =$  भूमिष्ठक से विचलन (+) या (-) चिह्न छोड़कर

(ii) विच्छिन्न और अविच्छिन्न श्रृंखला (Discrete and Continuous Series)

$$\text{माध्य विचलन (M D)} = \frac{\sum f |dx|}{\sum f}$$

(समांतर माध्य से)

$$\text{माध्य विचलन (M D)} = \frac{\sum r |dm|}{\sum f}$$

(मध्यका से)

$$\text{माध्य विचलन (M D)} = \frac{\sum f |dz|}{\sum f}$$

#### 4 सभी श्रृंखलाओं में (In All Series)

$$\text{माध्य विचलन गुणांक (Coefficient of (M D))} = \frac{\text{माध्य विचलन}}{\text{माध्य या मध्यका या भूविच्छेदक}}$$

#### 5 प्रमाण विचलन (Standard Deviation)

(i) व्यक्तिगत श्रृंखला (Individual Series)

(क) प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

$$\text{प्रमाण विचलन } (\sigma) = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N}}$$

जहाँ  $dx = (X - \bar{X})$  अर्थात् मदा का ममा तर माध्य से विचलन

(ख) अप्रत्यक्ष या लघु विधि (Indirect or Short Cut Method)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2}$$

जहाँ  $dx =$  मदा का कल्पित माध्य से विचलन

(ii) विच्छिन्न और अविच्छिन्न श्रृंखला (Discrete and Continuous Series)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f dx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum f dx}{\sum f}\right)^2}$$

(iii) पद विचलन विधि (Step Deviation Method)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f dx'^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum f dx'}{\sum f}\right)^2} \times i$$

जहाँ  $x' =$  मध्य बिन्दु

$$dx' = \frac{x-a}{i}$$

$i =$  कग विस्तार या ममापवतरु

6 विचरण मापांक, (Variance)  $= \sigma^2$ ,

7 विचरण गुणांक (Coefficient of Variance or CV)  $= \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100$

## सहसम्बन्ध (Correlation)

## सहसम्बन्ध गुणांक (Coefficient of Correlation)

## 1 कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक सूत्र (Karl Pearson's Correlation Coefficient of Equations)

प्रत्यक्ष विधि

$$r = \frac{\sum dx dy}{N \sigma_X \sigma_Y} \text{ अथवा } \frac{\sum dx dy}{\sqrt{\sum dx^2 \sum dy^2}}$$

जहाँ  $r =$  सहसम्बन्ध गुणांक $d = (X - \bar{X})$  अर्थात्  $X$  श्रेणी का समांतर माध्य से विचलन $dy = (Y - \bar{Y})$  अर्थात्  $Y$  श्रेणी का समांतर माध्य से विचलन $\sigma =$  श्रेणी  $X$  का परिमाण विचलन $\sigma_Y =$  श्रेणी  $Y$  का परिमाण विचलन $N =$  मदी की संख्या

अप्रत्यक्ष विधि—कल्पित माध्य विधि

$$r = \frac{\sum dx dy - \frac{\sum dx \times \sum dy}{N}}{\sqrt{\sum dx^2 - \frac{(\sum dx)^2}{N}} \times \sqrt{\sum dy^2 - \frac{(\sum dy)^2}{N}}}$$

जहाँ  $r =$  सहसम्बन्ध गुणांक $d = X$  श्रेणी का कल्पित माध्य से विचलन $dy = Y$  श्रेणी का कल्पित माध्य से विचलन $N =$  मदी की संख्या

## 2 चार्ल्स स्पियरमैन का क्रम-सहसम्बन्ध गुणांक (Charles Spearman's Coefficient of Rank Correlation)

$$rk = 1 - \frac{6 \sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

जहाँ  $rk =$  क्रम सहसम्बन्ध गुणांक $D =$  क्रम या स्थान अंतर (जिस क्रम  $X$ -क्रम  $Y$ ), $\sum D^2 =$  क्रमांतरों के वर्गफलों का योग $N =$  पद युग्म (pairs of items) की संख्या

## सूचकांक (Index Numbers)

## 1 साधारण समूह विधि (Simple Aggregative Method)

$$P_{01} = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100$$

जहाँ  $P_{01}$  = वर्तमान वष का मूल्य सूचकांक

$\Sigma P_1$  = वर्तमान वष के मूल्या का योग

$\Sigma P_0$  = आधार वष के मूल्या का योग

2 साधारण मूल्यानुपात माध्य विधि (Simple Average of Price Relative Method)

$$P_{01} = \frac{\Sigma \left( \frac{P_1}{P_0} \times 100 \right)}{N}$$

जहाँ  $N$  = मदा या वस्तुआ की सख्या

3 भारित समूह विधि—लस्पेयरेस विधि (Weighted Aggregative Method Lespeyres' Method)

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} \times 100$$

जहाँ  $Q_0$  = आधार वष में वस्तु की मात्रा

4 मूल्यानुपातों की भारित माध्य विधि (Weighted Average of Price Relative Method)

$$P_{01} = \frac{\Sigma \frac{P_1}{P_0} \times 100 \times P_0 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0}$$

5 निर्वाह व्यय सूचकांक के निर्माण के लिए भारित समूह विधि

$$\text{निर्वाह व्यय सूचकांक } (P_{01}) = \frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} \times 100$$

6 पारिवारिक बजट रीति

इस रीति द्वारा सूचकांक का निर्माण करने के लिए सूत्र इस प्रकार है

$$\text{उपभोक्ता-मूल्य सूचकांक} = \frac{\Sigma PV}{\Sigma V}$$





## Examination Papers

Delhi 1980

Class XI

ECONOMICS

Time Allowed: 2½ Hours

Maximum Marks 90

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

### Part I

1. सांख्यिकी की परिभाषा दीजिए। आर्थिक नियोजन के क्षेत्र में इसकी उपयोगिता बताइए। 46
2. प्राथमिक आंकड़ा का सकलित करने की विभिन्न रीतियाँ के नाम लिखिए। इनमें से किसी एक के गुण तथा की विवेचना कीजिए। 28

अथवा

निम्नलिखित में से किन्हीं दो पर संक्षिप्त टिप्पणी कीजिए (उदाहरण के लिए कल्पित आंकड़ा का प्रयोग कीजिए)

- (a) आवृत्ति आयत चित्र
- (b) वृत्त चित्र
- (c) चित्र-अलेख। 5,5
3. अधशास्त्र ने अध्ययन में निर्देशकों के महत्त्व की संक्षिप्त व्याख्या कीजिए। 10

अथवा

निम्नलिखित आंकड़ों की सहायता से 1975 को आधार मानकर सरल समूह रीति 1979 का निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

वस्तुएँ	क	ख	ग	घ	ङ
1975 की कीमतें (रुपया में)	50	40	10	5	2
1979 की कीमतें (रुपया में)	80	60	20	10	6

अथवा

निम्ने आंकड़ा की सहायता से कीमत तथा पूँति में क्रम सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए।

कीमत	4	6	8	10	12	14	16	18	20
पूँति	10	15	20	25	30	35	40	45	50

निम्न आँकड़ा से मध्यका, प्रथम चतुर्थक तथा तृतीय दशमक ज्ञात कीजिए

साप्ताहिक आय (रुपया में)

श्रमिकों की संख्या

58	2
59	3
60	6
61	15
62	10
63	5
64	4
65	3
66	1
	4,3 3

5 निम्न वितरण से माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए

मद	आवृत्ति
0— 5	2
5—10	5
10—15	7
15—20	13
20—25	21
25—30	16
30—35	8
35—40	3
	4,6

### Part II

- 1 ब्रिटिश शासन-काल में भारत में बाजार व्यवस्था के प्रसार से पूँजीवादी उद्यम के प्रादुर्भाव में किस प्रकार सहायता मिली ?  
अथवा  
उन्नीसवीं शताब्दी में भारत में हस्त शिल्पों के विनाश के चार कारण गिनाइए ।
- 2 जनसंख्या विस्फोट से आप क्या समझते हैं ? भारत में इसके दुष्परिणामों से बचने के लिए उपयुक्त कदमों की क्या आवश्यकता है ?
- 3 भारत में आर्थिक नियोजन के तीन प्रमुख उद्देश्य बताइए । उनमें से किसी एक का भारतीय जनता के लिए महत्त्व बताइए ।

- 4 निम्न में से किन्हीं दो का उत्तर दीजिए
- (a) भारत के निर्यात की प्रमुख मदा के नाम बताइए ।
  - (b) भारत में केन्द्रीय सरकार की आय के तीन प्रमुख स्रोतों के नाम बताइए ।
  - (c) भारत के तीन महत्वपूर्ण बड़े पैमानों के उद्योगों के नाम बताइए । 3,3
- 5 उपयुक्त शब्द चुनकर निम्न वाक्यों की पूर्ति कीजिए
- (a) भारत में मौद्रिक सफल उत्पादन की तुलना में वास्तविक सकल उत्पाद में अधिक / कम वृद्धि हुई है ।
  - (b) भारत में राष्ट्रीय उत्पादन में कृषि का योगदान बढ़ / घट रहा है ।
  - (c) भारत में शिक्षित बेरोज़गारी घट / बढ़ रही है ।
  - (d) भारत का व्यापार सन्तुलन प्रायः अनुकूल / प्रतिकूल होता है । 2,2 2,2



